

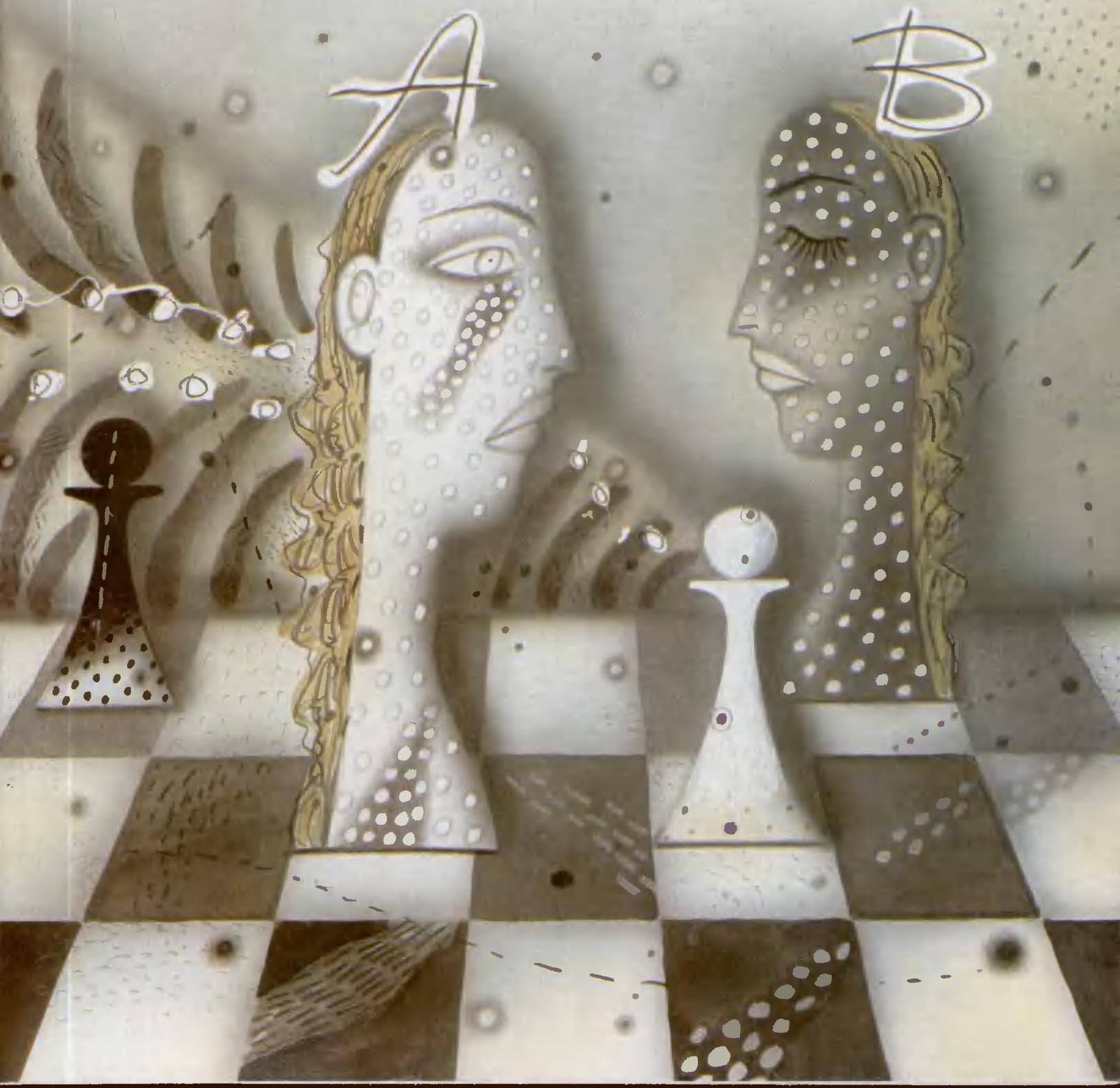
МАЙ/ИЮНЬ

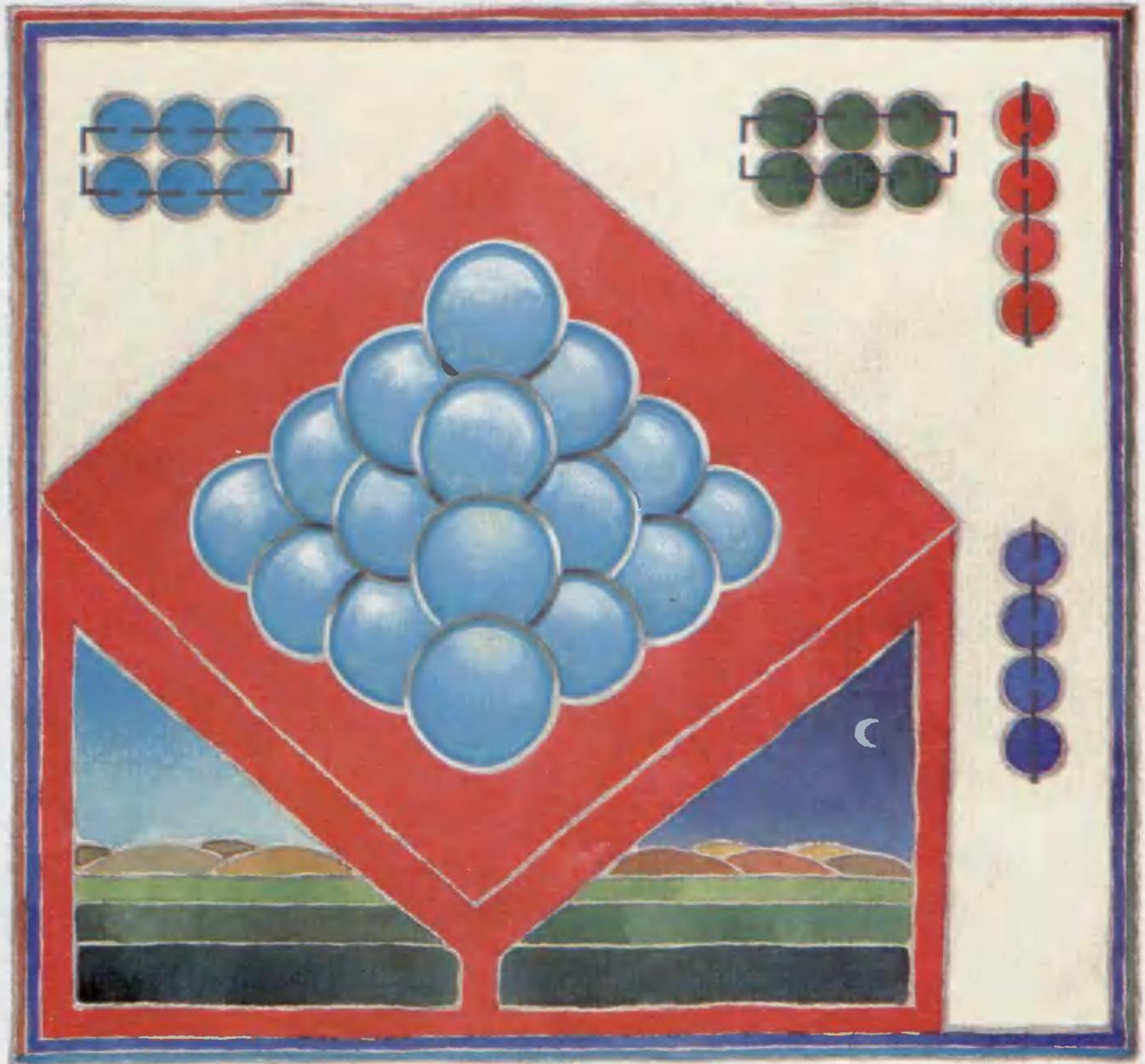
ISSN 0130-2221

2001 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





Тетраэдр из шариков

Сложить из двадцати отдельных синих шариков тетраэдр, показанный на рисунке, совсем просто. Но в предлагаемой головоломке шарики скреплены в четыре жесткие группы (4, 4, 6, 6), нарисованные слева, и такой же (только разноцветный) тетраэдр нужно собрать из этих четырех элементов. Попробуйте! Шарики можно вылепить из глины (или пластилина) или воспользоваться старыми бусами; между собой их можно скрепить клеем, проволочкой или тонкими деревянными палочками.

А.Калинин

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров
(заместитель главного редактора),
В.А.Тихомирова, В.М.Урчев,
А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора),
И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Пагрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2001, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Как зарождалась физика. *В.Фистуль*
6 Чему равна сумма углов многоугольника? *И.Сабитов*
В Белок, побеждающий бактерии. *И.Яминский*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 16 Пьер Ферма (к 400-летию со дня рождения). *Л.Шибасов, З.Шибасова*
21 Под сенью яблони в цвету. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 23 Задачи М1771–М1780, Ф1778–Ф1787
25 Решения задач М1751–М1755, Ф1763–Ф1772

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи
31 Чудо-дерево. *А.Котова*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Теплота и работа

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Кинематика точного курса. *А.Черноуцан*
37 Печаль или радость. *К.Блиох*
40 Эффективное напряжение в сети переменного тока. *В.Ланге*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Зачем Галилею песочница. *А.Стасенко*

ИНФОРМАЦИЯ

- 44 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
45 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ
46 ЗИФМШ объявляет прием

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 47 Самый произвольный треугольник. *И.Акулич*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 53 Электрические цепи постоянного тока. *Ю.Чешев*

ОЛИМПИАДЫ

- 57 VII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса
59 IX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

- 62 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей! (15, 56)
«Квант» улыбается (15, 56)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Пьер Ферма»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики на монетах мира*

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».



Как зарождалась физика

В. ФИСТУЛЬ

В ПЕРВЫЕ СЛОВО «ФИЗИКА», означающее в переводе с греческого «природа», было введено в обиход Аристотелем. Он же дал определение задач физики как науки, полностью справедливое и в наше время: «...ведь мы тогда уверены в познании всякой вещи, когда узнаем ее первые причины, первые начала и разлагаем их вплоть до элементов ...ясно, что и в науке о природе надо определить прежде всего то, что относится к началам».

Еще до Аристотеля многие мыслители так или иначе пытались осуществить сформулированную им стратегическую программу применительно ко многим вещам и, главным образом, к строению самого окружающего мира. Этих исследователей относили к философам – мудрым людям (сначала их называли физиологами). А термин «философия» был введен Пифагором. Посмотрите на имена в хронологической таблице на рисунке 1 – среди «ранних» мудрецов и следует искать истинного родоначальника физики. А Аристотель, которому часто приписывают «отцовство» физики, является лишь ее «крестным отцом», давшим этой науке имя.

С современных позиций, физика подразделяется на теоретическую и экспериментальную. Конечно, обе они представляют единое целое, но поскольку теория часто идет от эксперимента, ее первая задача – объяснить опытные данные и вторая – предсказать новые эксперименты и (помимо их самостоятельного значения) либо подтвердить справедливость разработанной теории, либо ее отбросить и заняться построением новой теории. Отсюда понятны и задачи экспериментальной физики, к которым необходимо отнести прежде всего опытное установление причинных закономерностей, связывающих реакцию объекта на внешнее воздействие с самим этим воздействием. Задачей экспериментальной физики является также указание возможностей практического использования результатов опыта в других областях деятельности Человека,

например в технике. Разумеется, эта задача очень важна в наше время и почти не ставилась в Древней Греции в период VI–IV веков до н.э., который отражен в приведенной таблице. Как нам представляется, с позиций разделения физики на теоретическую и экспериментальную и следует искать родоначальника (или родоначальников) физики.

До нас дошли различные легенды, так или иначе связанные с происхождением различных физических терминов. Вроде известной истории о

древнегреческом пастухе, случайно подметившем торможение колеса телеги с железным ободом камнями, лежащими на дороге. Это, по-видимому, были куски магнитного железняка – магнетита. От имени этого пастуха – Магнуса – и произошли термины «магнит» и «магнетизм». (Впрочем, есть и другая версия происхождения этих терминов: от названия области Магнесия в Малой Азии, в которой добывали камни, содержащие минерал пирит, т.е. магнетит, – сырье для выплавки железа.) По другой известной легенде термин «электричество» произошел от греческого названия янтаря – «электрон», – который после полировки мехом притягивает деревянные опилки. Эти и подобные им события, если и были в действительности, то должны быть отнесены к наблюдениям, а не к сознательно поставленным физическим экспериментам. Так же, как и многочисленные наблюдения астрономического характера.

Из различных литературных источников следует, что первый физический эксперимент был осуществлен в школе пифагорейцев. Его суть понятна из рисунка 2, где изображены четыре струны одного диаметра, но разной длины, которые при одном и том же натяжении издадут различные звуки. Еще лучше для изучения звучания струн разной длины использовать специальный прибор, называемый монохордом, в котором длина струны варьируется скользящим держателем, а одинаковость натяжения струн обеспечивается одной и той же пружиной. Скорее всего, именно так и был поставлен опыт Пифагором и его учениками (таким же образом этот опыт можно провести и сегодня в любом школьном кабинете физики).

Пифагор нашел, что звучание приведенных на рисунке струн соответствует основному тону, октаве, квинте и кварте в звучании лиры – одного из древних музыкальных инструментов. По современным представлениям, открытие Пифаго-

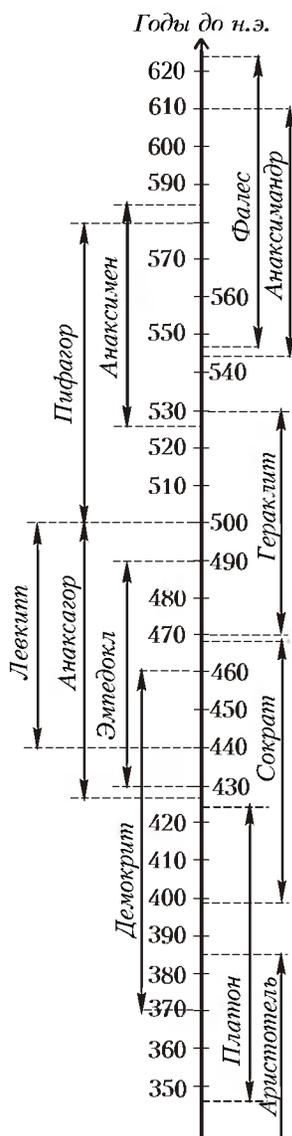


Рис.1. Хронологическая таблица жизни некоторых древних философов

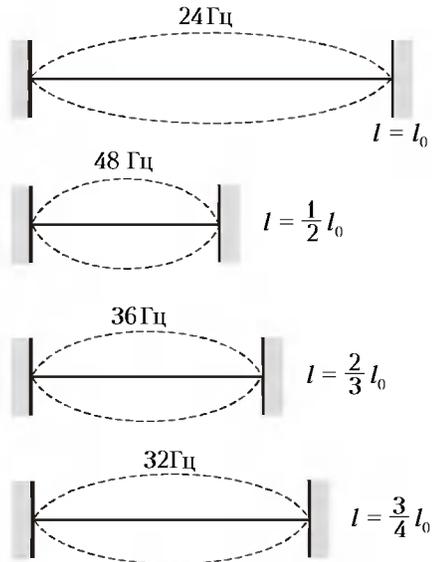


Рис.2. Иллюстрация к опыту Пифагора со звучанием струн разной длины

ра может быть сформулировано в терминах звуковой частоты – значения этих частот указаны на том же рисунке 2.

Предание приписывает Пифагору и другое наблюдение: звучания металлических болванок при ударе кузнечных молотов. Впоследствии Пифагор, якобы, открыл связь звучания с массой молотов. Но подробно это экспериментальное исследование было проведено и описано учеником Пифагора Гиппасом. Он изготовил четыре медных диска одного диаметра, но различающихся толщиной, и установил соотношения между массой дисков и музыкальными тонами. Таким образом, опыт Гиппаса следует трактовать как еще один метод установления музыкальных отношений.

Известно, что к научной школе Пифагора при его жизни и после принадлежали 218 мужчин и 17 женщин. Некоторые из них продолжали заниматься экспериментальным изучением акустики. Тем не менее, поскольку первый сознательный физический эксперимент был осуществлен самим Пифагором, именно его следует считать истинным «отцом» экспериментальной физики. Хотя Дж.Гамов, например, считает, что установленные Пифагором соотношения музыкального ряда являются и началом теоретической физики, поскольку они носят количественный характер. Вряд ли с этим утверждением можно согласиться – ведь

основная задача теоретической физики состоит в том, чтобы понять все или хотя бы часть уже известных фактов. При этом вовсе не обязательно это понимание представлять в математической форме.

Вновь обратимся к хронологической таблице на рисунке 1 и кратко рассмотрим теоретические концепции упомянутых в ней философов.

Наиболее древними в этом ряду являются Фалес, Анаксимандр, Анаксимен, Пифагор, Геркалит. Их воззрения на Природу, по существу, еще близки к предшествующим мифологическим взглядам. Так, Фалес считал, что первичной субстанцией всего сущего является вода. Этот взгляд прямо восходит к древним мифам о происхождении всех вещей в результате сочетания бога Океана с богиней воды Тефилой. Аристотель предполагал, что Фалес видел, что «пища всех существ влажная и что само тепло из влажности получается... что семена всего, что есть, имеют влажную природу».

В противоположность Фалесу, Анаксимандр отказался от всех предостоящих взору человека причин как возможных первоначал. Он приписал роль первоначала некой ненаблюдаемой субстанции. Живший несколько позднее Анаксимен считал воздух более простым первоначальным веществом, чем вода у Фалеса. Наконец, Гераклит приписал первичность материи огню.

Теперь вернемся к Пифагору, но уже не как к физик-экспериментатору, а как к философу. Пифагорейская философия исходила из того, что в основе мира лежат числа. Более того, им приписывалась божественная роль. Утверждение пифагорейцев о том, что «все есть число», – основной постулат их теоретических представлений. Всем вещам, в том числе и вселенной, они приписывали определенные числа. Пифагорейцы считали, что солнце, земля, луна, неподвижные звезды (как целое) и все планеты, которых в то время было известно всего пять, движутся вокруг некоего центрального огня. Таким образом, планетарный числовой ряд, по их разумению, состоял из 5 планет и 4 промежутков между ними. А для дополнения до числа 10, которое они считали священным, им пришлось предположить существование так называемой противоземли.

Кроме фетишизации самих чисел, Пифагор, его ученики и последователи важную роль отводили числовым соотношениям. Так, открытые ими числовые соотношения музыкальной гармонии они перенесли на небесную сферу, поскольку считали, что движение планет тоже должно быть гармоничным. Отсюда следовало утверждение, что величины расстояний от планет (сфер) до «центрального огня» должны находиться в определенных соотношениях, не равных, но аналогичных тем, которые наблюдаются в музыке. (По этому учению, вращающиеся сферы издадут неслышимые гармонические звуки. До нас с того времени дошло выражение «музыка сфер». В целом мистика чисел оказалась очень живучей. Ею широко пользовались религия, астрология, различные виды магии и до сих пор ее отголоски мы почти ежедневно встречаем в жизни во многих пословицах, сказках и крылатых выражениях.)

Таким образом, хотя учение Пифагора и его школы никак нельзя отнести к истокам теоретической физики, идея о важности числового, количественного подхода к описанию Природы спустя много веков реализовалась – возникла математическая физика, или, более общо, математическое естествознание.

Все перечисленные философы так или иначе искали единственное первоначало всего сущего. Более поздние философы видели, что одним первоначалом невозможно объяснить многообразие материального мира, и отказались от этой идеи.

Первым из них был Эмпедокл. Его подход был прост: он считал первоначалом действующие одновременно четыре элемента – огонь, воздух, воду и землю, ранее рассматриваемые отдельно.

Другой взгляд был предложен Левкиппом. Первоначала Левкиппа представляли бесчисленные мельчайшие неделимые частицы. Эти частицы получили название атомов, что в переводе с греческого и означает «неделимые». По Левкиппу, атомы бесконечно разнообразны по форме и размерам и находятся в непрерывном хаотическом движении, в котором они сталкиваются друг с другом, образуя своеобразные вихри. Эти вихри служат строительным материалом для образования всех вещей в окружающем мире, в том

числе и самого мира. Кроме того, по-видимому, Левкиппу принадлежит первая формулировка принципа причинности: «Ничто не совершается случайно, но все совершается по какому-нибудь основанию и с необходимостью».

Конечно, атомистика Левкиппа и других древнегреческих ученых – это совсем не то, что физики стали понимать под этим словом уже в новое время, начиная с XIX века. Тем не менее, именно с учения Левкиппа началась эра атомистики в науке, которая, непрерывно развиваясь до сегодняшнего дня, является теоретической основой физики. Поэтому мы с полным правом можем считать Левкиппа «отцом» теоретической физики. К сожалению, ни труды Левкиппа, ни его художественные или скульптурные портреты до нас не дошли. Сведения о самом Левкиппе и о его учении нам известны лишь от его последователей, главным образом – от Демокрита.

Ученик Левкиппа Демокрит был полной противоположностью своему учителю. Демокрит неустанно излагал атомистику Левкиппа в различных аудиториях – в школах, лицеях, на различных диспутах, тем более что он побывал в Вавилоне, Египте, Персии и, разумеется, во многих городах Греции. Преподавательская и лекторская деятельность всегда оттачивает структуру излагаемого предмета, упорядочивает взгляды, что и позволило Демокриту распространить взгляды Левкиппа на всеобщую теорию развития Природы и Человека.

Демокрит, «пропустив через себя» атомистику Левкиппа, внес в нее настолько много своего, что в последующее время уже было трудно разграничить, что в ней от Левкиппа, а что от Демокрита. И все же, Демокрита можно, безусловно, считать первым творческим «пропагандистом» теоретической физики, но нельзя считать ее первооткрывателем.

Современником Левкиппа и Демокрита был еще один древнегреческий философ – Анаксагор. Он также исповедовал множественность первоначал, но не в виде атомов, а в виде неких «семян». Эти семена подобны каждому из существующих веществ: «...любой металл, любая ткань животного или растительного организ-

ма имеет начало в виде самого себя. Скольких веществ, столько и материальных начал». Таким образом, семена – это частицы, совпадающие по наименованию и обладающие всеми теми же свойствами, что и вещества, которые мы ощущаем, т.е. видим и осязаем. Однако семена Анаксагора принципиально отличаются от атомов Левкиппа – Демокрита тем, что, в противоположность неделимым атомам, они могут безгранично делиться.

Следующее положение концепции Анаксагора говорит в том, что каждая вещь в мире состоит одновременно из всех семян. В своих сочинениях Анаксагор многократно повторяет: «во всем заключается часть всего». Следовательно, в любой вещи содержатся определенные доли всех существующих вещей (современные ученые называют это положение принципом «универсальной смеси»). Совершенно ясно, что перед Анаксагором возникала необходимость объяснить, почему же каждой вещи присущи характерные лишь для нее свойства, хотя в ней присутствуют и все остальные вещи в виде семян. Эту проблему Анаксагор решает, исповедуя другой принцип: «...чего всего более в каждой вещи, тем одним она и кажется...» (это положение ученые называют принципом «преобладания»).

К рассмотренным принципам Анаксагора необходимо добавить и самое первое его представление, именуемое в наши дни «принципом сохранения материи». В дошедших до нас фрагментах его сочинений ясно говорится: «...никакая вещь не возникает и не уничтожается, но соединяется из существующих вещей и разделяется. И, таким образом, правильнее было бы назвать возникновение соединением, а уничтожение разделением». Справедливость требует указать, что этот принцип не был открыт Анаксагором – он известен и в философии Эмпедокла, его придерживались и атомисты Левкипп и Демокрит.

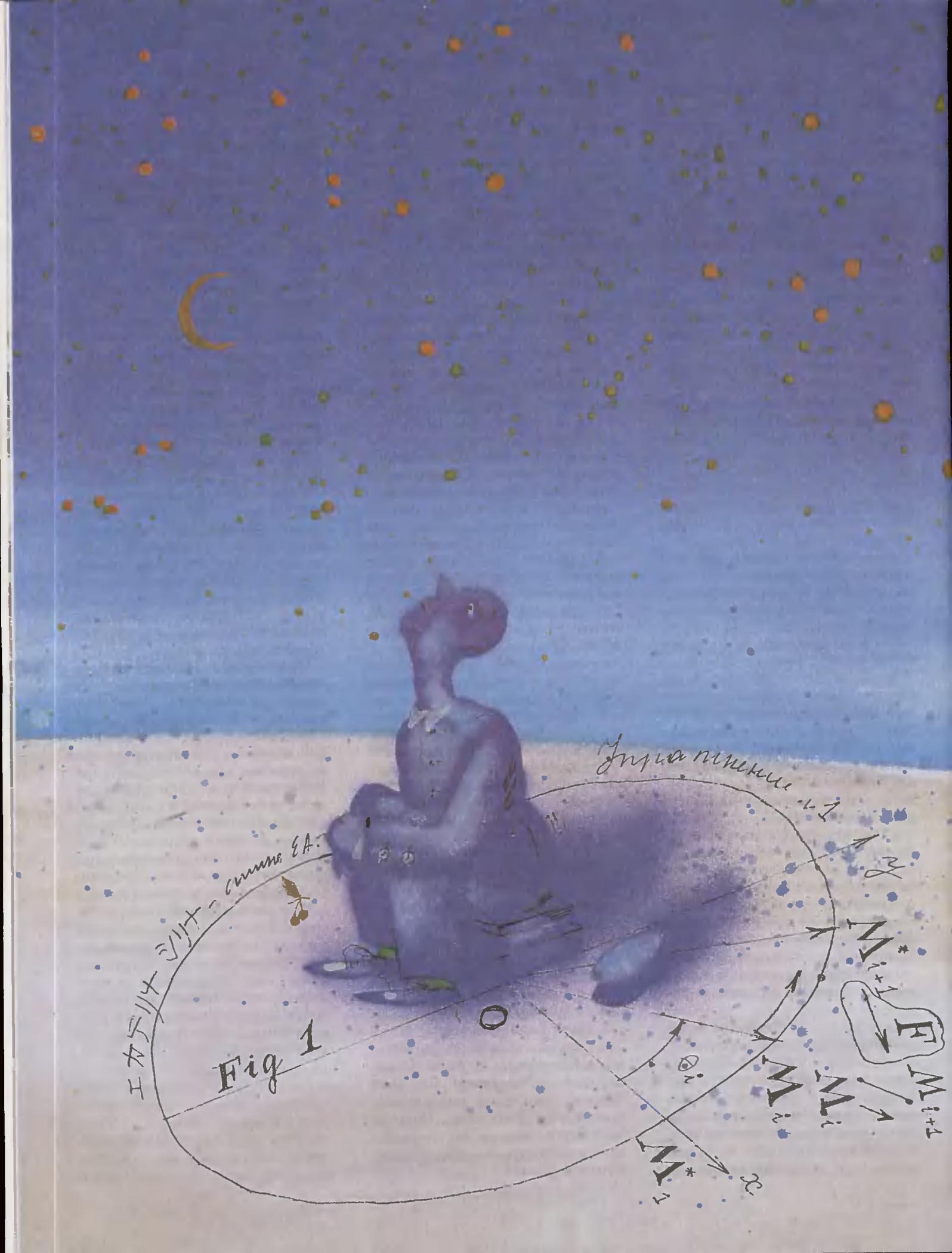
В свете всего сказанного видно, что теория Анаксагора является вполне законченной теорией, заслуженно занимающей в истории физики положение альтернативы атомистике Левкиппа. Поэтому Анаксагора, несомненно, тоже следует причислить к «отцам» теоретической физики.

Из хронологической таблицы видно, что Анаксагор и Левкипп были современниками, но знали ли они о теориях друг друга? Четких указаний на это в истории нет, и поэтому остается сослаться на предположение ученых, что Анаксагор сознательно создавал свою теорию как антитезу теории Левкиппа. Атомистика древнегреческих философов была воспринята и развивалась достаточно гладко на протяжении веков (и развивается по сей день). По-иному сложилась судьба теории Анаксагора. Долгое время она была интересна лишь историкам науки. И только в самое последнее время на нее обратили внимание физики-теоретики, поскольку некоторые ее черты оказались схожими с представлениями современных теорий.

Укажем, например, на развивающиеся представления о вселенной не как о механической аддитивной сумме всех ее частей, а как о едином целом. Мир при этом представляется целостным образованием, так что на любой его части «записан» весь мировой порядок. Таким образом, для всего мира, а значит, и для всего сущего характерна «голографичность». Не правда ли, это похоже на подход Анаксагора?

Подобные воззрения начали появляться только в середине XX века и все больше занимают умы современных философов и физиков-теоретиков. Наиболее убедительным примером являются усилия теоретиков в разработке единой теории поля. Имеются также многочисленные примеры новых подходов в теоретической физике, свидетельствующие о сосуществовании раздельного и целостного подходов к описанию Природы, являющихся «наследниками» теорий Левкиппа и Анаксагора.

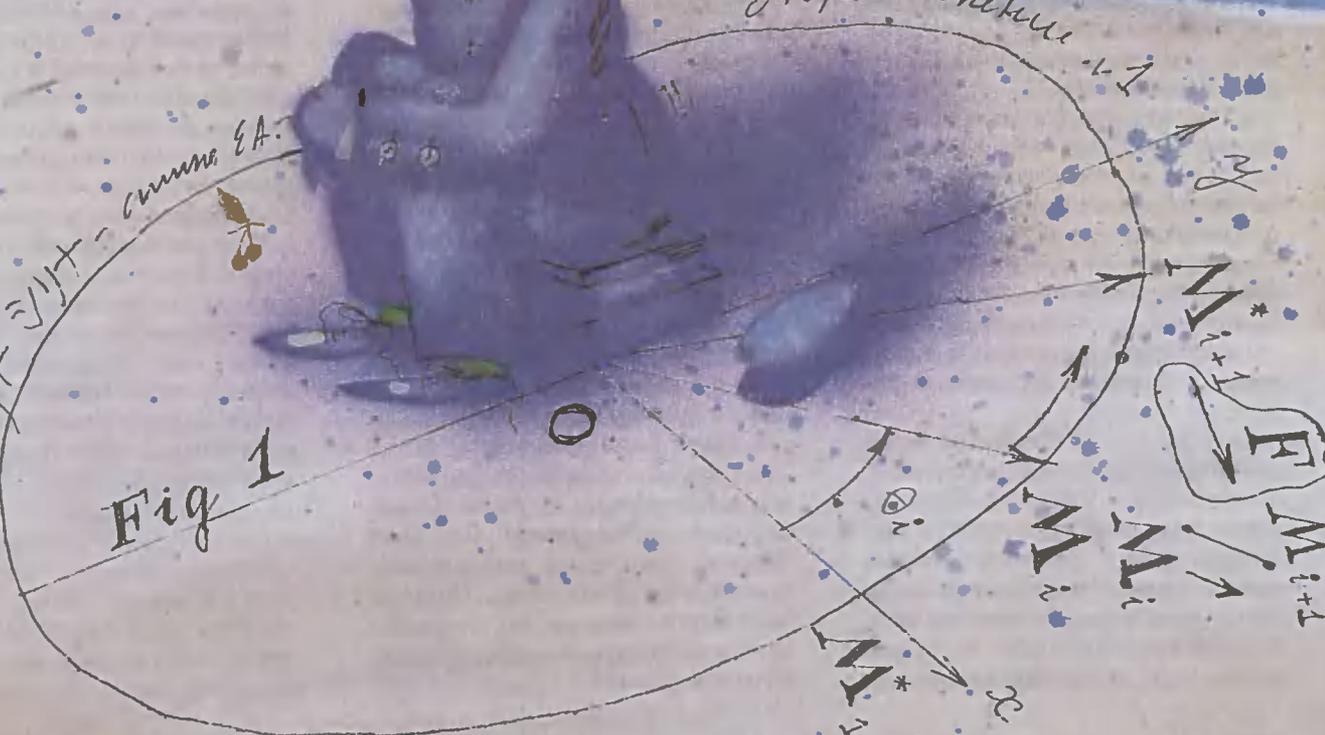
Итак, основоположниками физической науки по праву можно считать «отца» экспериментальной физики Пифагора, «отцов» теоретической физики Левкиппа и Анаксагора, первого «пропагандиста» теоретической физики Демокрита и «крестного отца» физики Аристотеля.



ИКАТЛЛН 3114 - common EA.

Fig 1

Импульс



Чему равна сумма углов многоугольника?

И. САБИТОВ

КАЖДЫЙ СТАРШЕКЛАССНИК скажет, что сумма внутренних углов плоского n -угольника равна $\pi(n-2)$, а сумма его внешних углов равна 2π . Однако приводимые в учебниках доказательства относятся, как правило, только к выпуклым многоугольникам. Мы же хотим найти сумму углов *любого* многоугольника, скажем такого невыпуклого многоугольника, как на рисунке 1, или даже

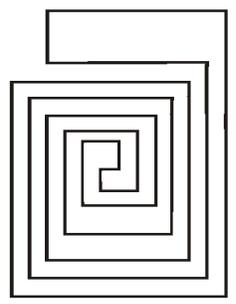


Рис.1

такого, как на рисунке 2, т.е. имеющего самопересечения. Ясно, что

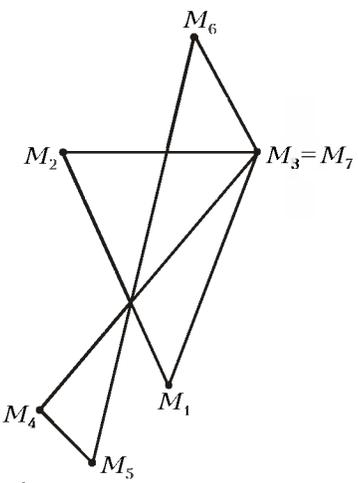


Рис.2

рассмотрение общего случая нужно начинать с точных определений.

Определения

Пусть на плоскости Π дана единичная окружность Γ с отмеченными

на ней n точками, $n \geq 3$. Перенумеруем их по порядку, следуя обходу окружности против часовой стрелки, и обозначим их как M_1^*, \dots, M_n^* . Сопоставим теперь каждой точке $M_i^* \in \Gamma$, $1 \leq i \leq n$, по некоторому правилу f точку $M_i = f(M_i^*) \in \Pi$, которую назовем *образом* точки M_i^* при отображении f , с единственным требованием, что двум соседним точкам M_i^* и M_{i+1}^* (считаем $M_{n+1}^* = M_1^*$) соответствуют две разные точки $M_i \neq M_{i+1}$, а в общем точки M_i^* и M_j^* , $j \neq i+1$, могут иметь совпадающие образы. Соединим теперь точки M_i и M_{i+1} последовательно отрезками прямых; полученную ломаную P назовем *n -угольником* с вершинами в точках M_1, \dots, M_n .

Очевидно, правило f сопоставления $M_i^* \rightarrow M_i$, $1 \leq i \leq n$, можно продолжить на всю окружность Γ так, что получится непрерывное отображение $F: \Gamma \rightarrow \Pi$, совпадающее с f в точках M_i^* и переводящее дуги $M_i^* M_{i+1}^* \subset \Gamma$ в отрезки $M_i M_{i+1} \subset \Pi$, и таким образом многоугольник P можно трактовать как образ окружности Γ при непрерывном отображении $F: \Gamma \rightarrow \Pi$, с требованием перехода данных дуг $M_i^* M_{i+1}^*$ в данные отрезки $M_i M_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$.

Построим в явном виде одно из таких возможных отображений F . Для этого введем на плоскости Π декартову систему координат Oxy с началом в центре окружности Γ и с положительным направлением оси Ox , идущим от центра к точке M_1^* . Тогда каждая точка M^* на окружности получит координаты $x^* = \cos \theta$, $y^* = \sin \theta$, где значения угла θ зависят от выбора направления обхода окружности. Для определенности всегда будем считать, что выбрано положительное направление обхода, так что $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Пусть точка M_i – образ точки M_i^* с координатами $x_i^* = \cos \theta_i$, $y_i^* = \sin \theta_i$ – имеет координаты (x_i, y_i) . Тогда отобра-

жение F на дуге $M_i^* M_{i+1}^*$ можно задать уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_i + \phi(\theta)(x_{i+1} - x_i), \\ y &= y_i + \phi(\theta)(y_{i+1} - y_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\phi(\theta)$ – произвольная непрерывная и монотонно возрастающая функция на $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, с условием $\phi(\theta_i) = 0$, $\phi(\theta_{i+1}) = 1$, а текущие значения θ определяются из координат точек M^* дуги $M_i^* M_{i+1}^*$, изменяющихся от M_i^* до M_{i+1}^* . Например, простейшей такой функцией является функция $\phi(\theta) = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}$.

Упражнения

1. Проверьте, что при изменении θ от θ_i до θ_{i+1} точки M с координатами (x, y) из (1) действительно заполняют отрезок $M_i M_{i+1}$, начиная с M_i и заканчивая M_{i+1} (рис.3).

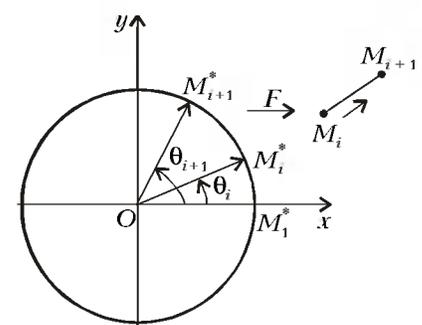


Рис.3

2. Покажите, что если вместо точек $M_i^* \in \Gamma$ взять вершины N_1^*, \dots, N_n^* правильного n -угольника Q , вписанного в Γ , то можно так подобрать новое отображение $G: \Gamma \rightarrow \Pi$ с $G(N_i^*) = M_i$, $1 \leq i \leq n$, чтобы в образе получился прежний многоугольник P .

3. Покажите, что можно найти отображение $H: Q \rightarrow \Pi$, с $H(N_i) = M_i$, линейное на каждой стороне $N_i N_{i+1}$ многоугольника Q и переводящее ее в соответствующую сторону $M_i M_{i+1}$ многоугольника P .

Теперь нам нужно определить, сумму каких углов многоугольника мы намерены искать. Для этого мы

Иллюстрация Е. Силовой

сначала немного сузим общность рассматриваемой задачи и предположим, что ни одна сторона многоугольника P не идет хотя бы частично вдоль предыдущей стороны (но быть продолжением по прямой предыдущей стороны ей не запрещается). Обход окружности Γ порождает соответствующее направление обхода многоугольника P , так что каждая его сторона $M_i M_{i+1}$ обходится от M_i к M_{i+1} . Стороны $M_{i-1} M_i$ и $M_i M_{i+1}$ образуют при вершине M_i два угла, величина одного из них меньше π , а величина другого больше π (или, мы это тоже допускаем, оба они равны π). При движении от M_{i-1} к M_{i+1} через M_i один из этих углов будет располагаться слева, а другой – справа от направления обхода. Так вот, за значение угла многоугольника в вершине M_i мы *всегда* будем брать геометрическую (т.е. неориентированную) величину угла, расположенного *слева* при обходе $M_{i-1} M_i M_{i+1}$. Таким образом, значение угла α_i при вершине M_i всегда

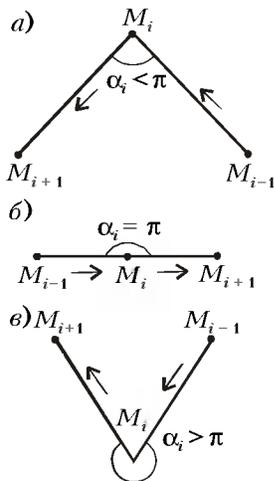


Рис.4

положительно, и или $0 < \alpha_i < \pi$ (рис.4,а), или $\alpha_i = \pi$ (рис.4,б), или $\pi < \alpha_i < 2\pi$ (рис.4,в).

Примеры

1) Пусть P – треугольник с указанным на рисунках 5,а или 5,б обходом от M_1 к M_3 через M_2 . Тогда для треугольника на рисунке 5,а сумма

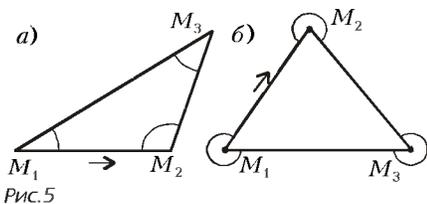


Рис.5

углов при его вершинах будет равна π , для рисунка 5,б эта сумма равна 5π , а вместе эти суммы составляют величину 6π . Очевидно, это общее свойство: если мы изменим направление обхода (или правило выбора углов), то сумма новых углов n -угольника вместе с суммой прежних углов будет равна $2n\pi$. Одни из этих углов можно условно называть *внутренними*, а другие – *внешними* углами многоугольника. Обратим внимание, что, во-первых, в нашем определении внешние углы дополняют внутренние до 2π (а не до π , как обычно предполагается в учебниках), во-вторых, внутренние углы совпадают с обычным нашим восприятием, только если многоугольник не имеет самопересечений и обход его выбран так, что область внутри многоугольника остается слева. Такой обход многоугольника без самопересечений называется *положительным*.

2) Для четырехугольника без самопересечений, будь он выпуклым, как на рисунке 6,а, или невыпуклым, как на рисунке 6,б, сумма

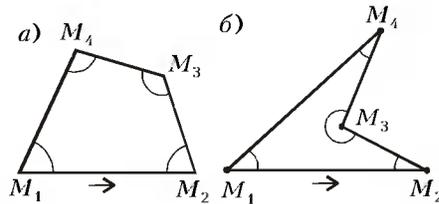


Рис.6

внутренних углов при положительном обходе равна $2\pi = \pi(n - 2)$, где $n = 4$, т.е. «школьная» формула остается верной и в невыпуклом случае.

3) Рассмотрим четырехугольник с самопересечением (рис.7). Нетрудно

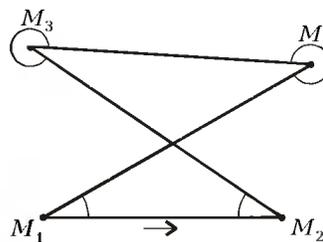


Рис.7

показать, что сумма его углов, выбранных по указанному выше правилу, равна 4π (убедитесь в этом сами).

4) Рассмотрим теперь пятиугольник с самопересечением (рис.8). Пусть K – точка пересечения сторон

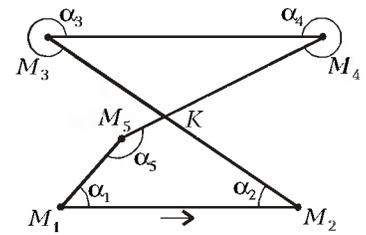


Рис.8

$M_2 M_3$ и $M_4 M_5$ и $K \neq M_5$. Сумма углов в четырехугольнике $M_1 M_2 K M_5$ равна 2π , а в треугольнике $K M_3 M_4$ она равна π . Учитывая, что углы при вершине K в обеих этих фигурах равны, при вычитании получим

$$\begin{aligned} \pi &= 2\pi - \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \\ &+ \angle K - (2\pi - \alpha_3) - (2\pi - \alpha_4) - \angle K = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_4 - 4\pi, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 5\pi.$$

Убедитесь сами, что при $K = M_5$ получится та же сумма 5π .

5) Наконец, если нам дан пятиугольник с таким самопересечением, как на рисунке 9, то можно

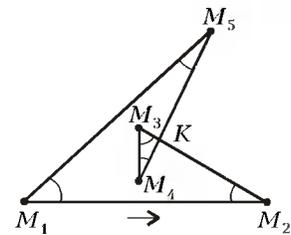


Рис.9

вычислить, что сумма его углов равна π (для этого вычтите из суммы углов треугольников $M_1 M_2 M_5$ и $M_3 M_4 K$ сумму углов треугольника $M_2 K M_5$).

Мы видим, что в отличие от «школьной» формулы $\pi(n - 2)$, справедливой для суммы внутренних углов *любого* выпуклого n -угольника, примеры 2 и 3 дают разные суммы углов для разных видов четырехугольников, а примеры 4 и 5 снова дают разные суммы для двух пятиугольников, хотя оба они имеют самопересечение. Следовательно, вопрос об определении суммы углов не так прост, как это может показаться на первый взгляд.

Индекс кривой

Пусть на плоскости нам дана *гладкая* кривая L . Это значит, что кри-

вая в каждой своей точке имеет касательную прямую, непрерывно изменяющуюся при движении точки вдоль кривой. Пусть кривая замкнутая и пусть указано направление ее обхода. Построим в каждой ее точке единичный касательный вектор, направленный в сторону обхода кривой (рис.10). Затем построим отоб-

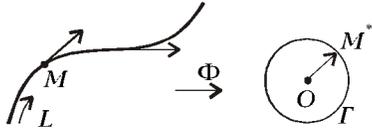


Рис.10

ражение Φ этой кривой на единичную окружность Γ по следующему закону: возьмем на L произвольную точку M и перенесем касательный к L вектор из точки M параллельно самому себе в центр O окружности Γ , тогда конец перенесенного вектора попадет в некоторую точку $M^* \in \Gamma$. Таким образом, если проделать это построение для всех точек кривой L , то получим искомое отображение $\Phi: L \rightarrow \Gamma$. При движении точки M вдоль кривой L в заданном направлении ее обхода вектор \vec{OM}^* перемещается вдоль окружности с непрерывным изменением угла θ между вектором и осью Ox . Выберем некоторую начальную точку M_0 обхода кривой L и некоторое начальное значение θ_0 угла между вектором \vec{OM}_0^* и осью Ox (этот угол определяется с точностью до целократного 2π). Затем, непрерывно перемещая точку M вдоль кривой L в направлении ее обхода вместе с касательным к L вектором, будем получать новые непрерывно изменяющиеся значения θ угла между вектором \vec{OM}^* и осью Ox . Разность $\theta - \theta_0$ обычно обозначается $\Delta\theta$ и называется приращением угла θ . После возвращения точки M в исходное положение M_0 вектор \vec{OM}^* тоже вернется в исходное положение; новое значение $\bar{\theta}_0$ угла θ , к которому мы пришли после завершения обхода, будет связано с прежним его значением равенством $\Delta_L \theta = \bar{\theta}_0 - \theta_0 = 2\pi k$ (значок L подчеркивает, что движение происходит вдоль кривой L), где k – некоторое целое число. Оно и называется индексом кривой L , или вращением поля касательных к L , с обозначением $k = Ind_L$. Это число является

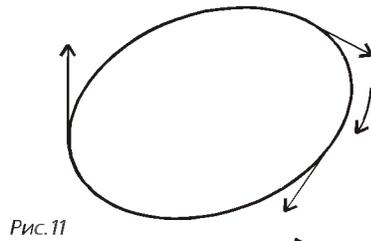


Рис.11



Рис.12

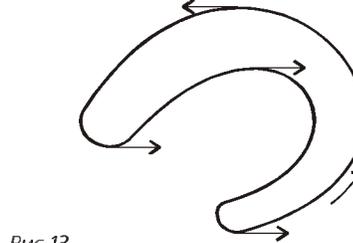


Рис.13

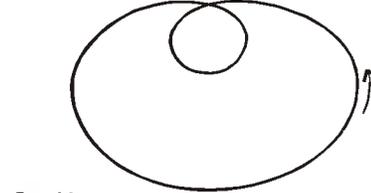


Рис.14

одной из важнейших характеристик кривой «в целом». Оно показывает, сколько оборотов «в конечном счете» сделает касательная при полном обходе вдоль кривой. На рисунках 11, 12, 13 и 14 изображены кривые с индексами $Ind = -1, Ind = 0, Ind = 1$ и $Ind = 2$ соответственно. Заметьте, что на рисунке 13 касательная трижды принимает положение «горизонтально направо» и соответственно имеет такие положения, когда угол между ней и осью Ox больше 2π , тем не менее окончательное значение угла $\theta = 2\pi$, так как касательная в ходе своего вращения возвращается к меньшим значениям угла.

В точках $M \in L$ вместо векторов, касательных к L , можно взять любые другие единичные векторы и аналогичным образом определить вращение этого нового векторного поля вдоль L .

Формула для суммы углов

Теперь мы готовы к выводу искомой формулы для суммы углов многоугольника. Рассмотрим произвольную вершину M_i , при которой угол $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ не является развернутым. Впишем в угол $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ круговую дугу Γ_i некоторого малого

радиуса (выпуклостью в сторону вершины M_i); пусть $A_{i-1}^{(i)}$ и $A_{i+1}^{(i)}$ – точки ее касания со сторонами $M_{i-1}M_i$ и M_iM_{i+1} соответственно. Заменим в многоугольнике P около каждой точки M_i ломаную $A_{i-1}^{(i)}M_iA_{i+1}^{(i)}$ дугой $A_{i-1}^{(i)}A_{i+1}^{(i)}$. Малость радиусов дуг Γ_i подберем так, чтобы после такой замены от каждой стороны M_iM_{i+1} остался отрезок $A_{i+1}^{(i)}A_{i+1}^{(i+1)}$, обходимый в том же направлении, что и сторона M_iM_{i+1} (рис.15). В итоге получится гладкая кривая, состоя-

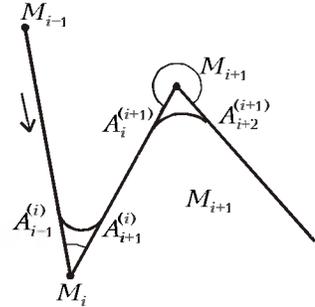


Рис.15

щая из частей сторон многоугольника P и дуг окружностей (рис.16). Обозначим эту кривую через L . По-

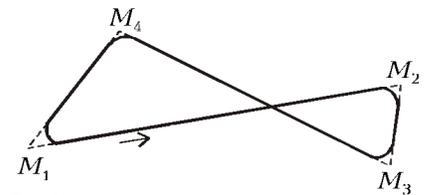


Рис.16

смотрим, на какой угол поворачивается ее касательная около каждой точки M_i . Пусть α_i – введенный выше угол при вершине M_i . Рассмотрим три возможных случая.

1) Отрезок M_iM_{i+1} располагается в правой полуплоскости от линии стороны $M_{i-1}M_i$ (рис.17). Продолжим сторону $M_{i-1}M_i$ по прямой за точку M_i как луч l_i с началом в M_i ; тогда угол поворота $\Delta_i\theta$ касательной к дуге $A_{i-1}^{(i)}A_{i+1}^{(i)}$ окружности Γ_i при обходе этой дуги равен ориентированному углу кратчайшего поворота

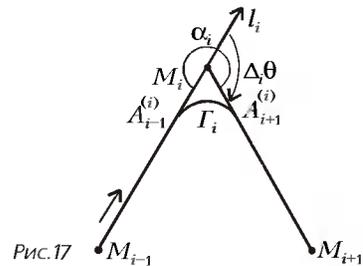


Рис.17

луча l_i в сторону луча $M_i M_{i+1}$ с учетом направления вращения, поэтому

$$\Delta_i \theta = \pi - \alpha_i < 0. \quad (2)$$

2) Пусть отрезок $M_i M_{i+1}$ располагается по левую сторону от $M_{i-1} M_i$. В этом случае $0 < \alpha_i < \pi$ (рис.18). Снова продолжим $M_{i-1} M_i$ за точку M_i как луч с началом в M_i ; и снова угол вращения касательной к дуге окружности равен ориентированному углу между лучом l_i и лучом $M_i M_{i+1}$, т.е.

$$\Delta_i \theta = \pi - \alpha_i > 0. \quad (3)$$

3) Сторона $M_i M_{i+1}$ является продолжением стороны $M_{i-1} M_i$. Тогда угол α_i равен π , а вращение касательной равно нулю, поэтому в таких вершинах M_i можем записать:

$$\Delta_i \theta = \pi - \alpha_i = 0. \quad (4)$$

На тех участках кривой L , которые идут по отрезкам сторон многоугольника P , вращения касательной нет вовсе, поэтому весь поворот касательной к L складывается из суммы ее поворотов на дугах окружностей Γ_i . Следовательно, взяв для каждого i соответствующие уравнения (2), (3) или (4) и сложив их,

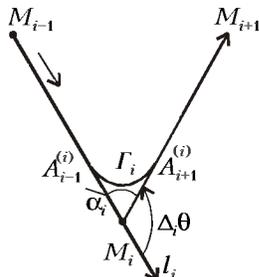


Рис.18

получаем $2\pi \text{Ind}_L = \pi n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$. Кроме того, видно, что Ind_L не зависит от выбора малых окружностей Γ_i , с использованием дуг которых была построена кривая L , поэтому вообще значение индексов всех кривых L мы можем назвать индексом самого данного многоугольника P и обозначать его как Ind_P . В итоге имеем искомую формулу

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi(n - 2\text{Ind}_P). \quad (5)$$

Если же мы будем вычислять сумму углов, лежащих *справа* по направлению обхода многоугольника, то она, очевидно, будет равна $\pi(n + 2\text{Ind}_P)$, и вместе с суммой внутренних углов получаем $2\pi n$, как и должно быть.

Как вычислять индекс кривой?

На первый взгляд в формуле (5) мало пользы: ведь вычисление индекса многоугольника сводится в свою очередь к нахождению ориентированных углов в вершинах M_i между продолжением стороны $M_{i-1} M_i$ и стороной $M_i M_{i+1}$, а их вычисление – задача такой же трудности, что и нахождение углов α_i .

Однако, оказывается, существует возможность вычисления индекса многоугольника даже без знания его углов. Для этого введем понятие *степени отображения* кривой на окружность. Пусть дана некоторая замкнутая ориентированная кривая L и пусть $\Phi: L \rightarrow \Gamma$ – некоторое непрерывное отображение кривой L на положительно ориентированную окружность Γ . Пусть кривая L и окружность Γ представлены как объединение конечного числа дуг L_1, \dots, L_k и, соответственно, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ (рис.19), таких, что каждая дуга L_i , $1 \leq i \leq k$, отображением Φ переводится или в конечную точку одной из дуг γ_j или гомеоморфно (т.е. взаим-

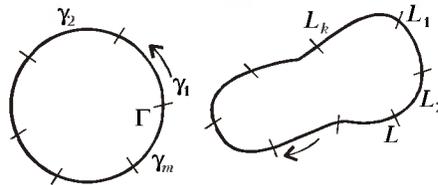


Рис.19

но однозначно и непрерывно в обе стороны) отображается на одну из дуг γ_j . Если, во втором случае, отображение Φ переводит дугу L_i в дугу γ_j с сохранением (изменением) направления обхода, то говорят, что степень отображения Φ на дуге L_i равна $+1$ (соответственно, -1).

Возьмем теперь некоторую точку M^* на окружности, не являющуюся концевой точкой ни одной из дуг γ_j . Пусть M_1, \dots, M_s , $1 \leq s \leq k$, – существующие на L прообразы точки M^* , т.е. точки, переводимые отображением Φ в M^* . На каждой из дуг кривой L , где лежат точки M_1, \dots, M_s , степень отображения Φ известна; пусть на p из них она равна $+1$, а на $q = s - p$ дугах она равна -1 . Тогда число $p - q$ называется *степенью отображения* Φ кривой L . Если же на L нет ни одного прообраза точки M^* , то степень отображения Φ считается равной нулю.

Основная проблема состоит, конечно, в доказательстве корректности этого определения, т.е. в том, чтобы доказать, что степень отображения не зависит ни от разбиения кривой L и окружности Γ на дуги, ни от выбора точки M^* . Оказывается, это действительно так. Пусть M_0 – некоторая точка на L , с которой мы начинаем обход, и пусть M_1 – первый прообраз точки M^* , встретившийся по направлению обхода L . Пусть для определенности точка M^* расположена в первой четверти и пусть степень отображения Φ в окрестности точки M_1 равна $+1$, тогда переход вектора $\Phi(M)$ на окружности Γ через M^* происходит против часовой стрелки и угол θ между осью Ox и вектором $\Phi(M)$ растет (образ точки $M \in L$ пересекает точку M^* «снизу вверх»). Затем вектор $\Phi(M)$ пересекает точку M^* во второй раз в следующем прообразе $M_2 \in L$. Если и в этот раз степень отображения равна $+1$, то угол θ окажется выросшим на 2π , так как вектор $\Phi(M)$ подойдет к M^* опять «снизу», начав движение с точек «выше» M^* и ни разу до этого не пересекая M^* , т.е. он сделает полный обход окружности; если же степень равна -1 , то весь прирост угла исчезнет, так как точка $\Phi(M)$ придет к M^* «сверху», так что угол вернется к исходному значению. Вообще, каждый прирост угла θ за счет перехода через M^* против часовой стрелки аннулируется переходом вектора $\Phi(M)$ через M^* в направлении часовой стрелки. Следовательно, если какой-либо переход через M^* против часовой стрелки не аннулируется переходом через M^* по часовой стрелке, то угол θ при подходе $\Phi(M)$ к M^* окажется выросшим на 2π и в итоге полное приращение $\Delta\theta$ этого угла окажется равным $2\pi(p - q)$, где p – число прообразов со степенью отображения $+1$ и одновременно число переходов через M^* против часовой стрелки, а q – аналогичное число для степеней -1 и переходов по часовой стрелке. А число $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = p - q$ есть не что иное, как вращение векторного поля $\Phi(M)$ вдоль L , следовательно, оно не зависит от выбора точки $M^* \in \Gamma$ и от чисел p и q , а зависит только от их разности, которая, таким образом, оказывается одинаковой при любом выборе M^* .

Теперь мы в состоянии дать эффективный способ вычисления индекса многоугольника P . Пусть, наряду с P , построена близкая к ней гладкая кривая L , как на рисунке 16. Выберем произвольно направленный луч l , с единственным требованием, чтобы он не был параллелен ни одной из сторон многоугольника P , и из каждой вершины $M_i \in P$ выпустим луч l_i , сонаправленный с l . Затем посмотрим, попал ли этот луч внутрь угла Q_i , определяемого продолжением стороны $M_{i-1}M_i$ за точку M_i и лучом M_iM_{i+1} (угол Q_i определяется однозначно условием, что его величина всегда меньше π , и его ориентация совпадает с направлением его вращения в сторону луча M_iM_{i+1}). Если он туда попал, то приписываем вершине M_i число $+1$ или -1 , в зависимости от того, $\alpha_i < \pi$ или $\alpha_i > \pi$, или, что то же самое, в зависимости от положительности или отрицательности ориентированного угла Q_i ; если же l_i попал во внешность этого угла, приписываем вершине M_i число 0 . После того как каждая вершина получит свое число, сложим эти числа. Полученная сумма Σ будет равна степени отображения кривой L на окружность по касательным векторам, а эта степень, как мы уже знаем, как раз равна индексу кривой, который, в свою очередь, равен индексу многоугольника P .

Упражнения

4. Докажите, что степень отображения кривой L на окружность по касательным к ней векторам действительно равна полученной сумме Σ .

5. Пусть луч l выбран так, что он оказался параллельным одной или нескольким сторонам многоугольника P . Проведем те же построения, что и выше, когда он выбирался не параллельным ни одной из сторон P , и припишем вершинам те же числа, если выполнены условия предыдущего рассуждения. Какие числа $(+1, 0, -1)$ надо приписать вершине M_i , если луч l_i совпадает с одной из сторон угла Q_i , для того чтобы сумма Σ приписанных всем вершинам чисел снова равнялась степени отображения кривой L на окружность?

Некоторые примеры и приложения

1) Пусть n -угольник P не имеет самопересечений, тогда сумма его углов в определенном выше смысле равна $\pi(n-2)$. Доказательство этого равенства на основании форму-

лы (5) тривиально, если знать, что индекс гладкой замкнутой кривой без самопересечений (такие кривые называют *жордановыми*), обходимой в положительном направлении, равен 1. Интересное в этом утверждении состоит, конечно, в том, что оно верно для любых, в том числе и для невыпуклых, жордановых многоугольников (поэтому, например, сумма углов в многоугольнике рисунка 1, имеющем 28 сторон, равна 26π , даже если углы брать не обязательно в 90°). Но, вообще говоря, само утверждение об индексе жордановой кривой доказывается не очень просто, поэтому мы поступим наоборот: докажем, независимо от формулы (5), что сумма углов жорданова n -угольника равна $\pi(n-2)$, и отсюда выведем, что *индекс жорданова многоугольника равен 1* (при условии, что обход многоугольника оставляет его внутренность слева). Для этого нам все же придется воспользоваться двумя фактами, формально не входящими в школьный курс геометрии, а именно, нам нужно знать: а) что любой жорданов многоугольник разбивает плоскость на две области – на *внутренность* и *внешность* многоугольника (это утверждение называется теоремой Жордана) и б) что если некоторая область, ограниченная *одним* многоугольником, *триангулирована*, т.е. разбита на треугольники так, что любые два треугольника триангуляции или вовсе не пересекаются, или их пересечение состоит из одной общей вершины или же из одного общего ребра, то числа N – число всех вершин, E – число всех ребер и T – число всех треугольников триангуляции связаны *формулой Эйлера*

$$N - E + T = 1. \quad (6)$$

Итак, пусть нам дан n -угольник P без самопересечений и пусть область D – внутренность этого многоугольника – разбита на T треугольников (рис.20). Пусть среди вершин этих треугольников внутри области D имеется $n_{\text{вн}}$ вершин, а на границе, кроме n вершин самого многоугольника, имеется еще $n_{\text{гр}}$ вершин. Тогда число E всех сторон треугольников триангуляции равно сумме $n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ – число ребер внутри D (на рисунке 20 $n = 9$, $n_{\text{гр}} = 4$, $E_{\text{вн}} = 16$, $T = 15$). Сумма углов треугольников равна πT , и она скла-

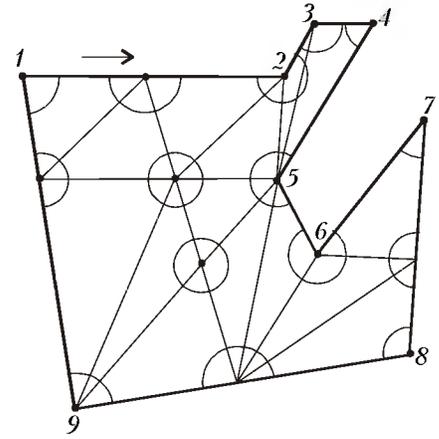


Рис.20

дывается из $2\pi n_{\text{вн}}$ – суммы углов при внутренних вершинах, $\pi n_{\text{гр}}$ – суммы углов при добавленных вершинах на границе, и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – суммы внутренних углов при вершинах многоугольника. Поэтому с учетом формулы Эйлера (6) и значений N и E имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i &= \pi(T - 2n_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}) = \\ &= \pi(1 - 3n_{\text{вн}} + E_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}). \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь вычислим число сторон другому. В T треугольниках имеется $3T$ сторон, но каждая сторона внутри области считается два раза, так как к ней примыкают два треугольника. Поэтому $3T = n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}$. Подставим это значение T в (6) и получим

$$\begin{aligned} 3(n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}) - 3(n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}) + \\ + (n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}) = 3, \end{aligned}$$

откуда имеем, что $E_{\text{вн}} = 3n_{\text{вн}} + n + n_{\text{гр}} - 3$. Теперь из (7) получаем $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi(n-2)$, что вместе с (5) дает искомое равенство $\text{Ind}_P = 1$.

2) Вычислим сумму углов многоугольника, изображенного на рисунке 2. Пусть обход многоугольника идет от вершины M_1 в сторону M_2 и далее. Выберем луч l , направленный вертикально вверх, и нарисуем сонаправленные с ним лучи l_i в каждой вершине многоугольника и продолжения сторон в сторону обхода, чтобы были видны углы Q_i при вершинах M_i , как это описывалось в предыдущем пункте. Из рисунка 21 видно, что числа при вершинах от M_1 до M_7 должны быть следующие: $0, -1, 0, 0, 0, 0, 0$. Следовательно,

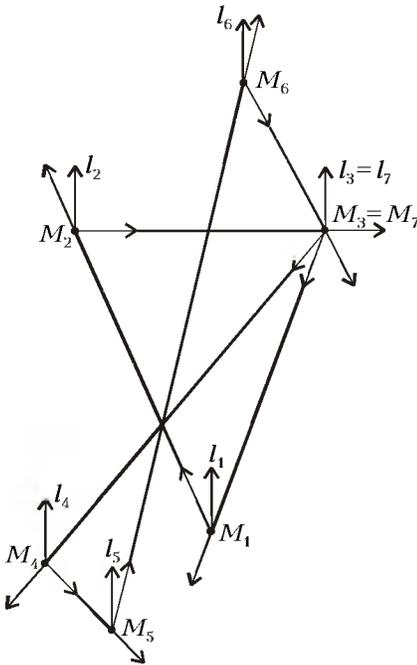


Рис.21

индекс этого 7-угольника равен -1 , а сумма его углов равна 9π .

3) Применение формулы (5) к примерам рисунков 6–9 дает нам следующие значения индексов рассмотренных там многоугольников: $Ind = 1, Ind = 0, Ind = 2$. Обратите внимание, что наличие точки самопересечения на рисунках 8 и 9 при одинаковом количестве сторон не приводит к одному и тому же значению индекса.

4) Так как углы многоугольника мы считаем по их абсолютной (или, по-другому, неориентированной) величине, то их сумма всегда положительна и кратна π , поэтому $Ind_p \leq \frac{n-1}{2}$. Значит,

$$Ind_p \leq k \text{ при нечетных } n = 2k + 1 \text{ и} \tag{8}$$

$$Ind_p \leq k - 1 \text{ при четных } n = 2k.$$

Покажем, что в обоих случаях существуют многоугольники с максимально возможным значением индекса, следовательно, с наименьшим значением суммы углов. Пусть $n = 2k + 1$. Возьмем на окружности вершины правильного вписанного n -угольника, обозначим их по порядку от M_1 до M_n при положительном направлении обхода окружности, начиная с произвольной вершины, и соединим их последовательно с пропуском $k - 1$ вершин: M_1 с M_{k+1} , M_{k+1} с M_{2k+1} и т.д., так что на

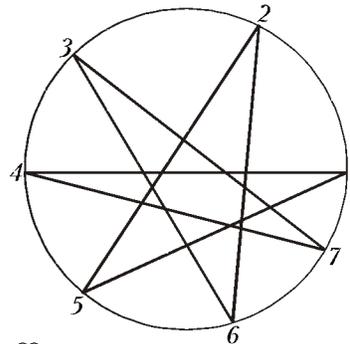


Рис.22

последнем шаге вершина M_{k+2} соединится с M_1 (см. рис.22 для $n = 7, k = 3$).

Упражнение 6. Докажите двумя способами, что для таким образом построенного многоугольника P сумма его внутренних углов равна π : первый раз вычислите сам угол при любой вершине и умножьте его на число вершин, а во второй раз покажите, что $Ind_p = k$ и примените формулу (5). Теперь «пошевелите» немного положение вершин многоугольника, и вы увидите, что первый способ вычисления суммы углов уже не сработает или же он будет чрезвычайно трудоемким, а второй способ вычисления практически не изменится. Вообще это очень полезное наблюдение, что малые изменения положения вершин многоугольника не изменяют ни индекса, ни значения суммы его углов, так как эти числа, будучи целыми или целократными π , не могут измениться «скачками» при малых изменениях составляющих их величин.

Для построения четностороннего n -угольника с максимальным индексом $\frac{n}{2} - 1$ поступаем следующим образом: возьмем на окружности $n = 2k$ точек как вершины правильного вписанного $2k$ -угольника и на $2k - 1$ вершинах $M_1, M_2, \dots, M_{2k-1}$ построим, как выше, $(2k - 1)$ -угольник с $Ind = k - 1$. Затем в этом многоугольнике заменим последнюю сторону $M_{k+1}M_1$ двумя сторонами $M_{k+1}M_{2k}$ и $M_{2k}M_1$. Получим n -угольник с прежним индексом $k - 1 = \frac{n}{2} - 1 = \max Ind$ (проверьте это утверждение).

Упражнения

7. Покажите, что не существует вписанного в окружность $2n$ -угольника ($n > 2$), имеющего максимальный индекс и равные внутренние углы, опирающиеся на непересекающиеся дуги окружности.

8. Постройте вписанный в окружность

$2n$ -угольник с максимальным индексом, у которого все внутренние углы равны между собой.

9. Покажите, что для данного $n \geq 3$ существует n -угольник P_n с любым наперед заданным значением индекса, $0 \leq Ind \leq \max Ind$, где $\max Ind$ определен формулой (8).

Особые случаи

В самом начале статьи мы предположили, что ни одна сторона многоугольника не идет хотя бы частично по предыдущей (по направлению обхода) стороне, образуя с ней угол, который можно считать равным нулю или 2π . По этой причине для многоугольника P , у которого какая-либо сторона M_iM_{i+1} идет «назад» по предыдущей стороне $M_{i-1}M_i$, не представляется возможным однозначным образом определить сумму его углов. Такой многоугольник можно определить как предельное положение двух типов «невыврожденных» многоугольников – назовем их типы P_+ и P_- , в первом из которых сторона M_iM_{i+1} расположена слева, а в другом – справа от предыдущей стороны $M_{i-1}M_i$ (рис.23). Для первого типа многоугольников угол α_i при

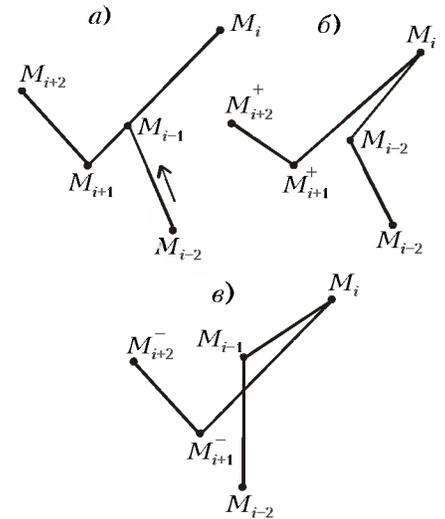


Рис.23

вершине M_i близок к нулю и в пределе для P получаем ту же сумму углов, что и у многоугольников типа P_+ . Для второго типа угол α_i близок к 2π , поэтому в пределе для P получается сумма на 2π больше, чем в первом случае. Из этого рассмотрения видно, как сумма углов многоугольника может зависеть от появления или исчезновения точек самопересечения, но это уже другая интересная тема для размышлений.

Белок, побеждающий бактерии

И. ЯМИНСКИЙ

БЕЛКОМ, ПРИМЕЧАТЕЛЬНЫМ во многих отношениях, является лизоцим. Во-первых, лизоцим – это фермент. А ферменты, как известно, – это биологические катализаторы, благодаря которым в клетках происходят многие химические превращения. Во-вторых, лизоцим обнаружен практически во всех живых организмах. Так, у позвоночных он содержится в слезах, в слюне, селезенке, легких, почках, лейкоцитах, а также в других местах и частях тела и выполняет функции неспецифического антибактериального барьера. Попросту говоря, он способен разрушать клеточную стенку бактерий и микробов и тем самым приводить их к гибели, или, выражаясь по-научному, к лизису. В-третьих, благодаря этим качествам лизоцим нашел полезное для человека применение – его используют в медицине как противомикробное средство, в том числе в качестве добавки в продукты детского питания. В-четвертых, большое количество лизоцима входит в состав куриного белка. Это может быть любопытно гурманам, которые обожают крутые яйца, яйца всмятку, яичницу или другие блюда из куриных яиц. В пятых, лизоцим – это белок, для которого полностью расшифрована его химическая формула, кроме того, определено пространственное расположение всех составляющих его атомов. Последнее было сделано с помощью методов рентгеноструктурного анализа (об этом – чуть позже).

С точки зрения современной химии, лизоцим является молекулой, которая состоит из повторяющихся звеньев – аминокислот, строительных единиц всех белковых молекул, имеющих более простую химическую формулу. У лизоцима аминокислоты, чередуясь, образуют длинную цепь. Таким образом, лизоцим является полимером, или, точнее, имея в виду его биологическое происхождение, – биополимером. Как

это практически всегда происходит с белками, биологические свойства биополимеров зависят не только от химического состава, но и от того, как составляющие белок полимерные цепи уложены в пространстве. Оказывается, что незначительное отклонение в пространственной укладке этих цепей может радикально менять биологическую активность белка. Причем для полноценного функционирования белка точность укладки отдельных функциональных групп должна достигать сотых долей нанометра. Нанометр – это привычная мера длины в микромире и составляет 10^{-9} м. В этих мерах длины размер одной молекулы куриного лизоцима составляет $2,8 \times 3,0 \times 3,2$ нм. По сути дела молекула лизоцима имеет форму слегка сплющенного того же самого куриного яйца. Правда размеры ее меньше, чем у куриного яйца, в десять миллионов раз.

Но вернемся к рентгеноструктурному анализу. И здесь снова лидирует лизоцим. Лизоцим – это первый фермент, для которого методом рентгеноструктурного анализа установлено его пространственное строение, или, как говорят биологи, – его третичная структура. До последнего

времени рентгеноструктурный анализ был единственным методом, с помощью которого можно было заглянуть внутрь белковой молекулы. Недавно появилась альтернативная возможность изучения белковых молекул с помощью метода ядерного магнитного резонанса.

Существенным моментом для обоих этих методов является следующее. Оказывается, для того чтобы узнать, как устроена одна-единственная белковая молекула, нужно сначала строго упорядочить в пространстве сотни миллиардов таких молекул. Это сделать можно, если из белковых молекул вырастить кристалл. При рентгеноструктурном анализе такой кристалл просвечивают рентгеновскими лучами под разными углами, а затем по картине дифракции этих лучей с помощью математических методов восстанавливают расположение отдельных атомов. Чем больше и совершеннее кристалл, тем полнее и точнее получаемые данные. Для установления полной картины устройства белковой молекулы в практических экспериментах необходимо выращивать кристаллы размером более 0,1 мм.

Получение белковых кристаллов

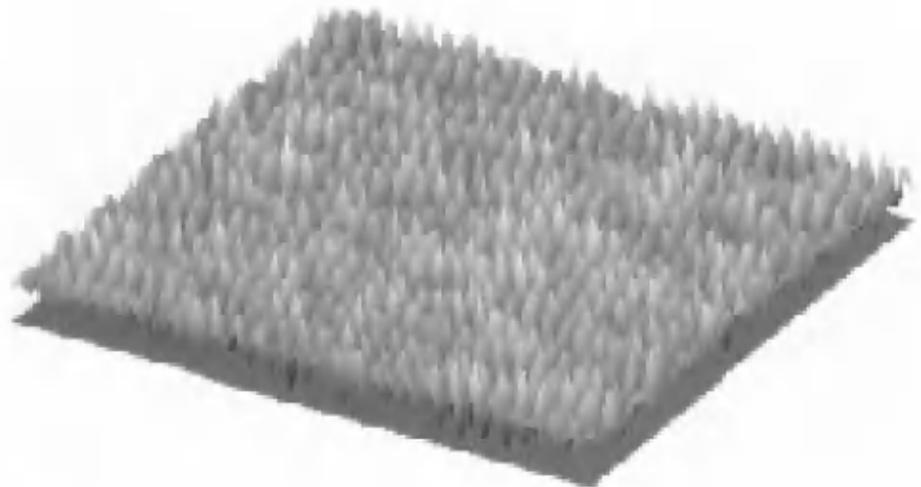


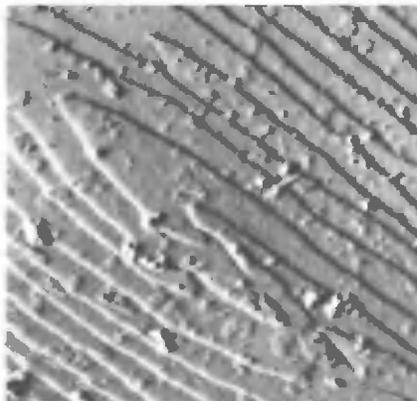
Рис. 1. Молекулярная решетка ромбического кристалла лизоцима, грань (010). Изображение размером 130×130 нм получено с помощью атомно-силового микроскопа

– дело очень тонкое. До сих пор так и не удалось кристаллизовать многие белки. Кристаллы лизоцима растут из насыщенного раствора только в строго определенных условиях, например в узком температурном интервале. В раствор лизоцима надо добавить немного поваренной соли NaCl. Кроме того, для успешного роста кристалла необходима добавка некоторого количества соляной кислоты HCl. Ионы Cl⁻ активируют лизоцим, а при их отсутствии его активность резко падает.

После изобретения атомно-силового микроскопа¹ стало возможным непосредственно увидеть, как молекулы лизоцима упакованы на гранях кристалла (рис.1). В атомно-силовом микроскопе игла, закрепленная на упругой микропластине, скользит по поверхности исследуемого образца. По изгибу микропластины, который регистрируют с помощью оптической системы, судят о высоте объекта. С помощью такого микроскопа удалось увидеть периодическую атомную решетку на поверхности кремния, графита, слюды, различных полупроводников и металлов.

Возможности атомно-силового микроскопа, однако, не безграничны, и поэтому визуализировать отдельные атомные дефекты в виде отсутствия или наоборот наличия одного дополнительного атома на поверхности, как правило, не удастся. А потребность наблюдения таких одиночных дефектов велика, например для изучения молекулярных механизмов роста кристаллов. Если знать законы роста кристаллов на уровне отдельных атомов, то можно делать совершенные кристаллы больших размеров. А это уже необходимо для различных прикладных задач, например в ювелирном деле при выращивании синтетических драгоценных камней. Здесь можно упомянуть и о разработке в Лос-Аламосе, где пытаются вырастить кристаллы калия дигидрофосфата размером почти в один метр. Такие кристаллы нужны для нелинейного преобразования лазерного света при создании установки управляемого термоядерного

¹ Устройство этого микроскопа во многом аналогично устройству сканирующего туннельного микроскопа, о котором можно прочитать, например, в статье И.Яминского «Закон Ома для разожженной цепи и ... туннельный микроскоп», опубликованной в «Кванте» №5 за 1999 год. (Прим. ред.)



4,7 мкм

Рис.2. Изображение дефекта на поверхности кристалла лизоцима – винтовой спирали. Размер участка поверхности порядка микрометра, высота ступенек соответствует размеру одной молекулы

синтеза. Для работы такой установки необходимы 40 совершенных кристаллов метровых размеров.

При изучении вопросов роста кристаллов неожиданным образом на помощь пришел лизоцим. У большинства неорганических кристаллов строительными кирпичиками являются отдельные атомы, размеры которых составляют доли нанометра. Другое дело молекулы лизоцима – они почти в 100 раз больше. Из-за больших размеров белковых моле-

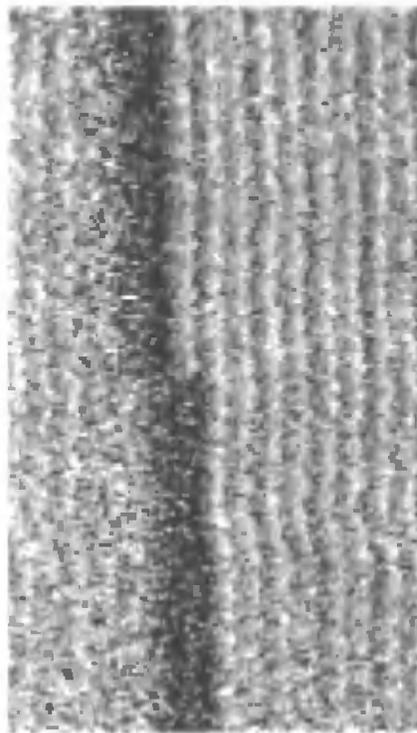


Рис.3. Молекулы лизоцима встраиваются в изломы на ступенях. На рисунке представлен излом шириной в одну молекулу

кул кристалл лизоцима может служить модельной системой при наблюдении роста кристаллов в атомно-силовой микроскоп. Ведь законы роста у неорганических и органических кристаллов одни и те же, поэтому для микроскопии лучше выбирать такие кристаллы, строительные единицы которых имеют больший размер. Тогда в атомно-силовой микроскоп можно с молекулярным разрешением наблюдать структуру дефектов (рис.2), видеть элементарные ступени и изломы на них (рис.3.).

Уникальные возможности атомно-силового микроскопа состоят в том, что он позволяет наблюдать за состоянием поверхности образца не только в воздухе или вакууме, но и в жидких средах. В случае растущего кристалла это позволяет, снимая кадр за кадром через небольшие промежутки времени, смотреть, как двигаются элементарные ступени, и измерять абсолютную скорость движения этих ступеней. На рисунке 4 представлена серия кадров, снятых с интервалом в 50 секунд. Ступени двигаются в направлении слева направо, скорость их движения составляет 5 нм/с. Эти наблюдения были недавно проведены автором статьи вместе с коллегами Л.Н.Рашковичем и Н.В.Гвоздевым на кафедре физики полимеров и кристаллов физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Итак, судьба лизоцима оказалась вполне успешной – его хорошо изучили, его используют в полезных случаях, а самое главное – он часто встречается в живой природе и выполняет там жизненно важные функции. Но нельзя сказать, что про него все известно и не будет новых открытий. Подтверждение тому – новый факт о структуре кристалла лизоцима, недавно обнаруженный с помощью атомно-силового микроскопа. Раньше считалось, что в элементарную ячейку ромбического кристалла лизоцима входит лишь одна молекула. Наблюдения в атомно-силовой микроскоп показали, что геометрические центры соседних молекул лизоцима в одном слое имеют некоторое смещение. Кроме того, молекулы в соседних слоях ориентированы по-разному. На это указывает измерение сил трения на соседних молекулярных слоях роста: каждый второй слой выглядит чуть более шероховатым, чем промежуточные

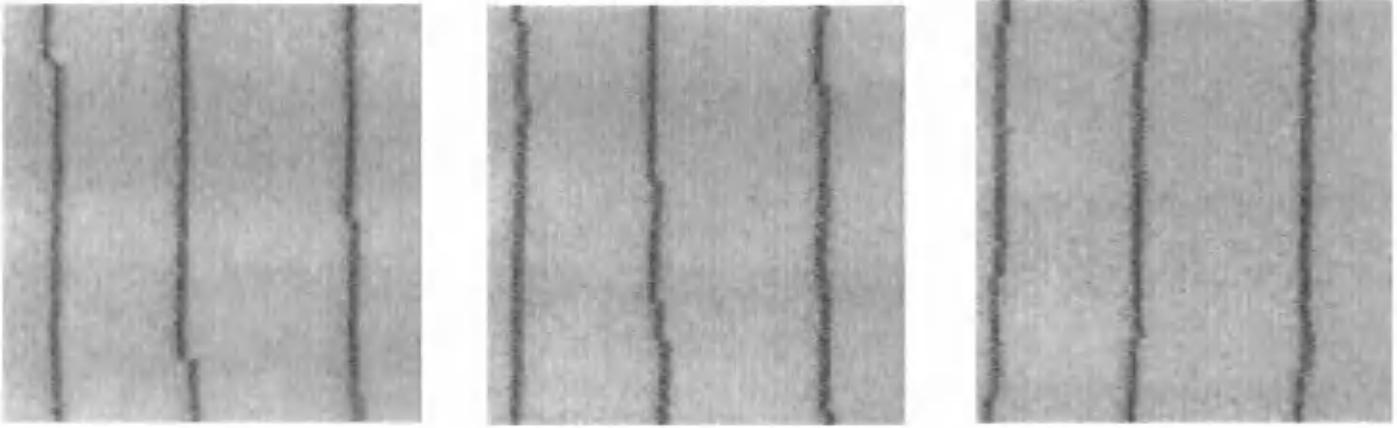


Рис. 4. Атомно-силовой микроскоп позволяет наблюдать поверхность кристалла, погруженного в жидкость, и наблюдать процесс его роста. Представленные кадры сняты с интервалом в 50 секунд. Заметно, что в процессе измерений происходит движение молекулярных ступеней (на рисунке справа налево), другими словами, что кристалл растет

между ними (рис.5). Молекула куринового лизоцима имеет слегка несимметричную форму. На ее поверхности имеется косая щель, в которой находится гидрофобный карман. Слово «гидрофобный» в буквальном переводе означает «водобоязненный», что правильно отражает свойства такого кармана: в водных растворах молекула белка ориентируется таким образом, чтобы избежать контакта с водой. Молекулы поворачиваются друг к другу гидрофобными частями благодаря появлению значительных сил притяжения между этими участками – гидрофобных сил. Следует заметить, что в изолированной молекуле белка, находящейся в растворе, сорбция и гидролиз веществ происходят именно в гидрофобном кармане. В природных условиях гидрофобные силы притяжения компенсируются электростатическими силами отталкивания, в результате в живых системах кристаллы лизоцима практически никогда не образуются. В искусственных системах можно подобрать концентрации примесных ионов таким образом, чтобы нарушить это равновесие и добиться кристаллизации белка.

В медицине применяются и другие белки в кристаллическом виде. В

1922 году Ф.Баттинг и Ч.Бест открыли простой белок инсулин и выявили, что он способствует снижению сахара в крови человека. Если организм человека неспособен самостоятельно производить этот белок в достаточных количествах, то может возникнуть тяжелый недуг – сахарный диабет. Механизм поддержания человека в норме в этом случае достаточно прост, хотя требует от больного значительного терпения, – нужно постоянно вводить в организм небольшие дозы инсулина. Оказалось, что лучше использовать препара-

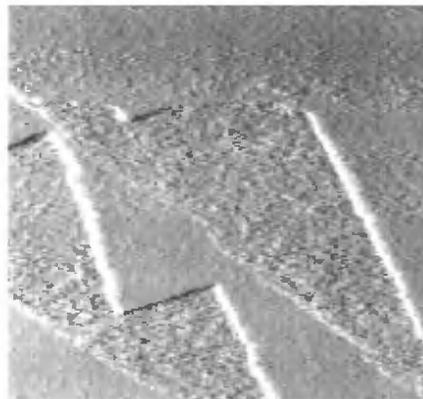


Рис.5. Соседние молекулярные слои роста имеют различную шероховатость, что хорошо видно в атомно-силовой микроскоп. Размер кадра 2 × 2 мкм

рат, содержащий кристаллы инсулина. В этом случае в организме человека происходит медленное растворение кристаллов, и эффект действия лекарства более продолжительный, нежели при применении просто раствора белка.

Аналогичное происходит и в совершенно ином процессе. Хорошая хозяйка знает, что квашенная капуста получится удачной, если взять поваренную соль не мелкого помола, а крупного, т.е. ту соль, которая состоит из кристалликов соли большего размера. В такой соли кристаллики растворяются медленно, концентрация растворенной соли ниже и поддерживается на этом уровне более долгое время. Поэтому закваска, или, по-научному, ферментативный процесс, идет более успешно. Кстати, само слово фермент происходит от латинского *fermentum*, что в переводе и значит закваска, брожение.

Подводя итоги, можно сказать, что заслуга лизоцима есть и в успехах современной молекулярной биологии, и в результатах изучения вопросов роста кристаллов. Поэтому вполне закономерно, что рассказ о лизоциме содержится в учебниках не только биологии, но и смежных наук.

Вниманию наших читателей!

Издательство «Бюро Квантум» и редакция журнала «Квант» подготовили к печати второе издание книги И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова «Задачи по физике», вышедшей в свет более двадцати лет назад в серии «Библиотечка «Квант».

Книга, ставшая уже классикой научно-популярного жанра, содержит сравнительно немного задач, но каждая из них демонстрирует возможности и особенности физического подхода к анализу реальных явлений. Решения же некоторых задач представляют собой эссе на заданную физическую тему.

Авторы книги стояли у истоков со-

здания журнала «Квант», много лет работали в его редакционной коллегии и активно участвовали в формировании того, что сейчас называют «квантовским» стилем. Редакция журнала «Квант» посвящает новое издание этой замечательной книги светлой памяти ее авторов.

Пьер Ферма

(к 400-летию со дня рождения)

Л. ШИБАСОВ, З. ШИБАСОВА

КОГДА-ТО ЛАГРАНЖ СКАзал об Исааке Ньютоне: «Он самый счастливый, систему Мира можно установить только один раз». С полным правом мы можем назвать счастливым человеком и французского математика Пьера Ферма (1601–1665). Ведь он стоял у истоков таких областей математики, как теория чисел, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, теория вероятностей. Но наибольшую славу и широкую известность ему принесла так называемая «Великая теорема Ферма», доказательство которой не подавалось усилиям ученых в течение трех с половиной веков. Представляется, что для Ферма не было неразрешимых задач, за какую бы он ни брался, везде получал замечательные результаты. И это тем более удивительно, что математикой он занимался на досуге, в свободное от работы время.

Дело в том, что специальностью Ферма была юриспруденция. Получив хорошее начальное образование и закончив университет, он всю свою жизнь проработал в Тулузе, городе на юге Франции, сначала адвокатом, а потом до конца жизни советником парламента – так тогда назывались окружные судебные органы. Высшим судебным чиновникам рекомендовалось вести уединенный образ жизни, иметь как можно меньше знакомых – с тем, чтобы объективно вести дела. Ферма неукоснительно следовал этим рекомендациям, выполняя свои обязанности столь добросовестно и умело, что «славился как один из лучших юристов своего времени».

Ферма жил в эпоху, блестяще описанную в известных романах А. Дюма. Это период царствования Людовика XIII, когда Францией фактически правил кардинал Ришелье, и



Людовика XIV, провозгласившего: «Государство – это я». Для прославления своего правления короли поощряли искусства и науки. Но расцвет науки во Франции XVII в. объясняется далеко не благожелательностью королей. В недрах достигшего высшей точки абсолютизма монархического государства уже зарождалось капиталистическое производство, основанное на использовании машин и механизмов. Перед естественными науками были поставлены практические задачи, стимулировавшие их стремительное развитие. Это время подарило миру блестящую плеяду французских ученых: П. Ферма, Р. Декарт, Б. Паскаль, Ж. Роберваль и др.

Советник тулузского парламента был далек от дворцовых интриг, занимавших героев А. Дюма. Время, свободное от судебных обязанностей, Ферма отдавал разнообразным увлечениям. Он обладал выдающимися способностями как в области математики, так и филологии. Он писал замечательные стихи на латинском, французском и испанском

языках, к нему обращались за советом при переводах с греческого. Но больше Ферма тянуло к математике. Именно здесь наиболее полно проявился его гений. Надо сказать, что при жизни Ферма не публиковал своих результатов, за исключением некоторых, совсем немногих, помещенных в виде приложений к книгам других авторов. Поэтому о достижениях Ферма мы можем судить только по его переписке с европейскими учеными, по оставшимся после него черновикам и по записям на полях принадлежавшего ему тома диофантовой «Арифметики».

Чтобы понять причину отсутствия у Ферма печатных работ, надо вспомнить, что научных журналов тогда не было (первый математический журнал вышел только в 1665 г.), а издавать книгу – хлопотное и дорогое удовольствие. Передача информации о научных достижениях осуществлялась чаще всего при помощи писем. Европейские ученые Нового времени вели переписку, как правило, через посредников. В первой половине XVII в. роль такого посредника выполнял аббат М. Мерсенн, возглавлявший в Париже кружок ученых. Он не только являлся хорошим специалистом во многих вопросах физики и математики, но и был человеком высоко порядочным. Сообщение ему о научном открытии было равносильно публикации: Мерсенн информировал об этом открытии всех заинтересованных ученых. Впоследствии члены возглавляемого им научного кружка составили ядро образованной в 1666 г. Парижской академии наук. После смерти (1648) Мерсенна посредническую миссию между учеными Европы стал выполнять юрист и королевский библиотекарь П. Каркави. Его и просил Ферма о посмертном издании своих работ. Но Каркави оказалось не под

силу собрать всю многочисленную переписку Ферма. Эту работу сделал старший сын Ферма, Самюэль. Он, несомненно, унаследовал способности отца, но не математические. Самюэль был юристом и поэтом, имя которого осталось в истории французской литературы, и – благодаря публикации трудов П. Ферма – в истории математики.

Сначала Самюэль обратился к тому диофантовой «Арифметике», на полях которого Ферма оставил множество замечаний. Издание (1670) так и называлось «Шесть книг арифметики александрийца Диофанта с комментариями К.Г.Баше и замечаниями П. де Ферма, тулузского сенатора». Затем (1679) он опубликовал «Различные сочинения», где собрал важнейшие результаты Ферма, содержащиеся в его переписке с другими учеными. На этих результатах мы остановимся чуть позже, а пока скажем несколько слов об упоминавшейся «Арифметике» древнегреческого математика Диофанта.

Написанная в III в. новой эры, она содержала так много новых для своего времени идей, что не была воспринята современниками Диофанта. Как и многие научные сочинения древности, она надолго оказалась забытой. Только в XVI в. были обнаружены 6 уцелевших книг из 13, составлявших «Арифметику», а в 1621 г. их перевел и снабдил комментариями французский математик и поэт Баше де Мезириак. Одним из первых по достоинству оценил этот труд Ферма. Изучая его, Ферма оставил на полях книги ряд бесценных замечаний, которые легли в фундамент новой области математики – теории чисел. Но не с этой книги начался его интерес к математике.

Аналитическая геометрия

Первая работа Ферма была посвящена «восстановлению» двух утраченных книг древнегреческого математика Аполлония «О плоских местах». Сведения о содержании этих книг имелись в трудах более позднего греческого математика Паппа. Под плоскими местами древние понимали лишь те геометрические места на плоскости, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Прямая и окружность именовались плоскими линиями, конические сечения (эллипс, гипербола, парабола) считались пространственными

линиями, поскольку для их задания надо иметь конус. Свойства кривых древние греки формулировали на геометрическом языке, используя отношения длин отрезков или сравнения площадей фигур, связанных с этими кривыми. С появлением в конце XVI в. в трудах французского математика Ф.Виета буквенных обозначений стало возможным описать эти свойства на языке алгебры. Эта идея захватила Ферма, по-видимому, уже в 1629 г. А в 1636 г. он посылает Мерсенну сочинение «Введение в теорию плоских и пространственных мест» – первое в мире изложение аналитической геометрии – раздела математики, сплотившего геометрию и алгебру на основе введения системы координат.

В привычном нам виде системы координат у Ферма не было: на плоскости выбиралась прямая, на которой отмечались отрезки, соответствующие одной переменной, под некоторым углом (чаще прямым) проводились другие отрезки, длины которых выражали вторую переменную. Алгебраическая зависимость между этими переменными определяла кривую. Ферма выяснил, что уравнения первой степени задают прямую, второй степени – конические сечения, указал на возможность введения пространственных координат. А в работе «Введение в изучение поверхностей мест» (1643) он рассмотрел поверхности второго порядка.

В 1637 г. французский математик и философ Р.Декарт издал свою знаменитую «Геометрию», где независимо от Ферма выступил творцом аналитической геометрии. Надо признать, что у Ферма она введена более систематично. Тем не менее основное влияние на развитие математики оказала «Геометрия» Декарта. В первую очередь это объясняется возможностью большого количества читателей познакомиться с ней, тогда как о работе Ферма знал ограниченный круг ученых. Кроме того, Декарт ввел более удачные обозначения, настолько удачные, что мы ими пользуемся и поныне. Вообще, в своей «Геометрии» Декарт выступил больше как алгебраист, в то время как Ферма тяготел к геометрии древних.

Создание аналитической геометрии в корне преобразовало математику, создало «питательную среду»

для ее развития. Именно благодаря ей математика стала математикой переменных величин, и вскоре вслед за этим появилось дифференциальное и интегральное исчисление. Это исчисление выросло из решения двух типов задач: с одной стороны – нахождение экстремумов функций и проведение касательных к кривым; с другой стороны – вычисление площадей фигур, объемов тел и длин кривых.

Математический анализ

Одновременно с изучением уравнений кривых Ферма заинтересовался проблемой нахождения экстремума функции, и в 1629 г. он сообщает Робервалю об открытии им соответствующего метода. Позднее (1638) он изложил его вместе с правилом проведения касательных к кривым в работе «Метод отыскания наибольших и наименьших значений», посланной Мерсенну. Идея метода отыскания экстремума функции основывается на том факте, что вблизи экстремума изменение функции наименьшее. Это подметил еще в XIV в. французский ученый Н.Оресм, а через два с половиной столетия немецкий астроном и математик И.Кеплер писал (1615): «по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». Никто из ученых не обратил на этот факт внимания. Лишь Ферма сумел отсюда сделать вывод о возможности приравнивания значений функции в малой окрестности точки экстремума и разработать на этом пути способ отыскания экстремумов. Прежде чем описывать сам метод, разберем его на конкретной задаче, взятой из указанной работы. Обозначения мы будем использовать современные.

Ферма формулирует задачу так: «Прямую AB требуется так разделить в C , чтобы прямоугольник ACB был наибольшим». Если обозначить длины отрезков AB и AC через a и x , то задача сводится к нахождению такого значения x , при котором площадь $S(x) = x(a - x)$ принимает максимальное значение. Для этого Ферма дает приращение h аргументу x , в результате площадь становится равной $S(x + h) = (x + h)(a - x - h)$. Если x – точка максимума функции $S(x)$, то, следуя наблюдению Кеплера, площади $S(x)$ и $S(x + h)$ можно приравнять; получаемое равенство Ферма назвал «вымышленным».

Приведя в нем подобные члены и сократив на h , он получает $a = 2x + h$, затем, отбросив слагаемое h , находит, как он говорит, «истинное равенство» $x = a/2$. Задача решена.

Приведем теперь рассуждения Ферма в общем виде для произвольного многочлена $P(x)$. Дадим аргументу x малое приращение h и найдем $P(x+h)$. Если x – точка экстремума, то $P(x) = P(x+h)$, или $P(x+h) - P(x) = 0$, – «вымышленное» равенство. Поделив на h , приходим к равенству

$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} = 0.$$

Отбросив в нем слагаемые, содержащие h , получим уравнение, определяющее точку экстремума. Для произвольной дифференцируемой в точке x функции рассуждения Ферма могут быть записаны следующим образом:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

т.е. производная в точке экстремума равна нулю. Это и есть необходимое условие наличия в точке x локального экстремума, получившее название *теоремы Ферма*.

Сам Ферма отлично понимал недостаток своих рассуждений: сначала приращение h отлично от нуля, поэтому на него можно делить обе части равенства, а затем оно фактически полагается равным нулю. Для избежания возникшего противоречия он в одном из писем (1643) приводит алгебраическое обоснование своей теоремы. Мы на нем останавливаться не будем, как и на описании способа Ферма проведения касательных к кривым.

Отметим лишь, что задачу отыскания касательных он «приводит к вышеизложенному методу», имея в виду способ «приравнивания». Декарт придрался к этой фразе, считая, что под «вышеизложенным методом» подразумевается нахождение отрезка наибольшей длины. Такое «непонимание» объясняется просто: незадолго перед этим Ферма послал Мерсенну некоторые критические замечания по поводу «Диоптрики» Декарта. Развернулась бурная полемическая переписка, в которой приняли участие многие ведущие математики того времени. В этой переписке, похоже, один Ферма сохра-

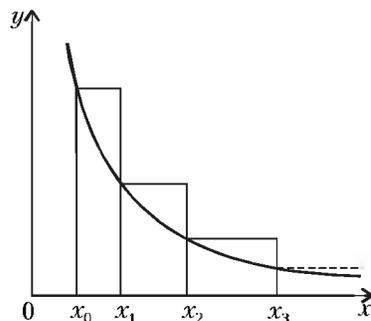
нял ровный тон, обстоятельно разясняя свою идею. Полемика не добавила славы Декарту, но самой математике пошла на пользу: она привлекла внимание ученых к зарождавшемуся исчислению, обогатила математику решением ряда новых задач на экстремум и уточнением понятия касательной.

В методе Ферма уже содержалась суть дифференциального исчисления, созданного в XVII в. И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Недаром Ньютон писал: «Намек на метод я получил из способа Ферма проведения касательных, применяя его к абстрактным уравнениям, я сделал его общим».

1629 г. был очень плодотворным для Ферма. Примерно тогда же он вычислил квадратуру параболы $y = x^n$ при натуральном показателе n . Для этого он разбил отрезок интегрирования на равные части и нашел, по сути дела, предел соответствующей интегральной суммы. Но перенести такой способ на случай рационального показателя ему не удалось, и тогда он придумал делить участок интегрирования не на равные части, а на отрезки, длины которых образуют геометрическую прогрессию. В записке «О преобразовании уравнений мест ... в применении к параболам и гиперболам» (ок. 1664) он изложил свой метод для кривых $y = x^p$ с любым рациональным показателем, продемонстрировав его на конкретных примерах. Способ настолько хорошо просматривается на этих примерах, что не представляет труда перенести его на случай степенной функции с произвольным рациональным показателем, о чем писал сам Ферма.

Приведем рассуждения Ферма при вычислении площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = x^{-2}$ на промежутке $[a, +\infty)$.

Промежуток интегрирования он



разбивает на частичные отрезки бесконечной последовательностью точек $a = x_0, x_1, x_2, \dots$ (см. рисунок) таким образом, чтобы $x_1 : x_0 = x_2 : x_1 = x_3 : x_2 = \dots = q$, где q – фиксированное число, большее единицы. Тогда $x_k = q^k a$, ординаты y_k соответствующих точек гиперболы равны $\frac{1}{q^{2k} a^2}$. Вычислим площадь S_k прямоугольника с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой y_k :

$$S_k = q^k a (q-1) \frac{1}{q^{2k} a^2} = \frac{q-1}{q^k a}.$$

Суммарную площадь всех прямоугольников легко найти, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{q} < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k = \frac{q-1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{q}{a}.$$

Если теперь в этом выражении перейти к пределу при $q \rightarrow 1$ (сам Ферма просто полагал $q = 1$), тогда все частичные отрезки стянутся в точки, и в результате получится искомая площадь бесконечной трапеции $S = \frac{1}{a}$.

Таким образом, в работах Ферма присутствовали не только интегральные суммы, но фактически и сами интегралы. Для создания математического анализа не хватало еще одного важного звена – установления связи дифференциальных и интегральных методов. Но это уже было задачей для следующего поколения ученых.

Теория вероятностей

В 50-х годах Ферма уже был известен в Европе как один из самых сведущих и авторитетных математиков. Именно к нему обратился с письмом Б. Паскаль за поддержкой своего способа решения задачи о справедливом разделе ставки. Сформулируем эту задачу. Два игрока делают ставку (вносят одинаковую сумму денег) и договариваются играть до тех пор, пока кто-либо из них первым не выиграет определенное заранее число партий. Победитель получает всю ставку. Предположим, что игра была прервана. Как справедливо разделить ставку между игроками?

К Паскалю с этим вопросом обратился кавалер де Мере – один из

Варианты Партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B	B	B	B	A	B
2	A	A	A	B	A	A	B	A	B	A	B	B	B	A	B	B
3	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B	A	B	B	B
4	A	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	B	B	B	B
выигрыш ставки	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B

придворных Людовика XIV, страстный игрок в кости. Поэтому задачу часто называют задачей де Мере, хотя она не была новой – ее решал еще итальянский математик Л.Пачоли в XV в.

Все ученые, которые занимались этой задачей раньше, делили ставку пропорционально выигранным партиям, т.е. считали, что течение игры определится ее началом и дальнейший ход не изменит сложившейся картины. Паскаль использовал совершенно иной подход. Он исходил из числа партий, оставшихся каждому игроку до полного выигрыша, считая выигрыш в каждой партии любого игрока равновероятным. Похоже, никто из ближайшего окружения не смог по достоинству оценить его решение, и тогда Паскаль послал (1654) его на суд Ферма: «...Я хочу поделиться с Вами своими рассуждениями, и Вы мне окажите милость: скажите мне, если я ошибаюсь, или согласитесь со мною, если я прав. Я Вас об этом прошу откровенно и искренне, так как я чувствую себя уверенно, только когда Вы на моей стороне».

Ферма заинтересовался задачей и в ответном письме предложил свое решение, рассмотрев случай, когда до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B – трех партий. Ясно, что будет сыграно не более четырех партий. Ферма составил таблицу всех возможных вариантов исходов этих партий. Приведем ее, обозначив буквой A в таблице выигрыш игрока A, а буквой B – выигрыш игрока B.

Лишь в вариантах 9–11 и 13–15 будут сыграны все 4 партии, в остальных игра закончатся раньше. Но Ферма подчеркивал, и Паскаль разделял его точку зрения, что и такие варианты надо просчитывать до конца. Из таблицы видно, что ставка должна делиться в отношении 11:5.

Методом Ферма можно решить задачу для любого числа оставшихся партий и даже при условии, что в игре участвуют более двух игроков.

Получив решение Ферма, Паскаль в следующем письме отвечает: «Я восхищен Вашим методом для партий, тем более что я хорошо понимаю, что он полностью Ваш, ничего общего не имеет с моим и легко приводит к тому же результату». В возникшей переписке был обсужден ряд вопросов, связанных со случайными событиями. Фактически в ней и зародилась теория вероятностей, появились первые ее понятия. Правда, в письмах не было слова «вероятность», а речь шла лишь о числе благоприятных исходов или, в крайнем случае, о его отношении к числу всех исходов, но ведь дело не в названии!

Кроме того, Ферма и Паскаль своей перепиской привлекли внимание ученых к этой новой области математики. Достаточно сказать, что молодой нидерландский ученый Х.Гюйгенс, приехавший в Париж в 1655 г. и узнавший о переписке, заинтересовался проблемой и уже через два года опубликовал работу «О расчете в азартных играх» – по существу первое исследование по теории вероятностей.

Теория чисел

К теории чисел Ферма питал особую любовь. Увлечшись задачами диофантовой «Арифметики», он обобщал их и ставил новые. Получая тот или иной результат, он посылал своим корреспондентам соответствующие задачи. В это время были приняты такие заочные математические состязания. Каждый ученый, получивший задачу, стремился решить ее побыстрее и наиболее изящным способом. Задачи Ферма, часто не поддававшиеся усилиям современников, в основном определили главные пути развития теории

чисел в течение последующих столетий.

В 1657 г. для привлечения внимания к теории чисел Ферма отправил английским математикам вызов: найти бесконечную последовательность натуральных решений уравнения

$$ax^2 + 1 = y^2 \quad (*)$$

при $a = 109, 149, 433$. У этого уравнения интересная история, начало которой теряется в глубине веков. Похоже, его умел решать еще Архимед – ведь он предложил Эратосфену «задачу о быках Солнца», которая сводится к такому уравнению при чудовищно большом значении a . Интерес к уравнению (*) объясняется тем, что любое уравнение второй степени с двумя неизвестными и рациональными коэффициентами рациональной заменой переменных сводится к уравнению $ax^2 + b = y^2$ с целыми коэффициентами. Оказывается, если оно имеет хотя бы одно натуральное решение, то их у него бесконечное множество, и все они получаются из решений уравнения (*). Английские математики справились с задачей, правда, не доказав, что их метод всегда приводит к успеху. Каково было решение самого Ферма, мы не знаем. Только в следующем веке Л.Эйлер показал, что если (x_0, y_0) – наименьшее решение уравнения (*), то все его остальные решения (x_n, y_n) имеют вид

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left((y_0 + x_0\sqrt{a})^{n+1} - (y_0 - x_0\sqrt{a})^{n+1} \right),$$

$$y_n = \frac{1}{2} \left((y_0 + x_0\sqrt{a})^{n+1} + (y_0 - x_0\sqrt{a})^{n+1} \right),$$

а французский математик Ж.Лагранж доказал (1769) существование наименьшего решения, а значит, и бесконечного множества решений.

Известно, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения простых чисел, т.е. простые числа служат как бы кирпичиками, из которых составляются натуральные, – поэтому интерес к простым числам в математическом мире всегда был велик. С давних пор ученые пытались найти формулу, дающую все про-

стые числа или хотя бы некоторую их последовательность и ни одного составного. Над этой проблемой думал и Ферма. В процессе поиска он пришел к формуле

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Почему он выбрал такой сложный показатель, понятно: число $2^s + 1$ при $s \neq 2^n$ (т.е. когда s содержит нечетный сомножитель) всегда составное. (Докажите это.)

В письме (1654) Паскалю Ферма писал: «Последовательное квадрирование двух при увеличении на единицу всегда простое число – это свойство, за истинность которого я ручаюсь». Но здесь интуиция его подвела. Хотя числа F_n при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ простые, уже число F_5 , как позже нашел Эйлер, делится на 641. Более того, среди следующих чисел F_n до сих пор не найдено ни одного простого. Числа F_n получили название *чисел Ферма*. Легко показать (сделайте это), что при $n > 1$ все они оканчиваются семеркой.

Кажется, о числах F_n можно было бы благополучно забыть, ведь они не сыграли предназначенной им роли. Но, как и другие результаты Ферма, они тоже нашли свое место в математике. Через полтора века К.Гаусс доказал теорему: *окружность можно разделить на N равных частей с помощью циркуля и линейки лишь в том случае, когда N имеет вид*

$$N = 2^k p_1 p_2 \dots p_m,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, a$ p_1, p_2, \dots, p_m – различные между собой простые числа Ферма.

Из этой теоремы следует, например, что на 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 равных частей разделить окружность можно, а на 7, 9, 11, 13, 14 частей – нельзя.

Занимаясь проблемой делимости чисел, Ферма нашел способ разложения любого натурального нечетного числа N на два сомножителя. Метод очень простой. Подбирается наименьшее число n , квадрат которого больше N . Тогда $N = n^2 - n_1$. Если $n_1 = m^2$, то разложение найдено: $N = (n - m)(n + m)$. Если же n_1 не является квадратом, то вместо n берется $n + 1$ и число N представляется в виде $N = (n - 1)^2 - n_2$. Если вновь n_2 не является квадратом, то вместо $n + 1$ испытывают последовательно числа $n + 2, n + 3$ и т.д. Читатели могут доказать, что дан-

ный метод всегда приводит к решению (в случае простого N придется считать до тех пор, пока число $n + k$ не станет равным $(N + 1)/2$). Приведем примеры:

$$323 = 18^2 - 1 = 19 \cdot 17,$$

$$697 = 27^2 - 32 = 28^2 - 87 = \\ = 29^2 - 12^2 = 41 \cdot 17,$$

$$13 = 4^2 - 3 = 5^2 - 12 = \\ = 6^2 - 23 = 7^2 - 6^2 = 13 \cdot 1.$$

Важную роль в теории делимости играет Малая теорема Ферма: *если p простое число и a не делится на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p* . Это замечательное свойство впервые было изложено Ферма в письме (1640) к Б.Френикю. Через полвека немецкий математик и философ Г.Лейбниц дал доказательство этой теоремы, позже Эйлер обобщил ее на случай составного p .

Но если Малую теорему знают люди, связанные с математикой, то Большая известна любому дилетанту. На полях диофантовой «Арифметики» напротив того места, где Диофант поставил задачу о представлении квадрата натурального числа в виде суммы двух квадратов, Ферма написал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки». Так родилась Большая, или Великая теорема Ферма: *уравнение*

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет натуральных решений при $n > 2$.

Можно лишь сожалеть по поводу размера полей диофантовой «Арифметики», поскольку решения Ферма мы не знаем. Может быть, оно на самом деле было очень оригинальным, и никто другой до него не додумался, а может быть, оно содержало ошибку. Недаром такой задачи Ферма не ставил своим корреспондентам, хотя частный ее случай для $n = 4$, правда в иной форме, он предлагал. Речь идет об утверждении: *не существует прямоугольного треугольника с целочисленными длинами сторон, площадь которого является квадратом*. Доказательство Ферма последнего утверж-

дения имеется на полях все той же «Арифметики». Оно достаточно сложное, и мы его приводить не станем, скажем лишь, что Ферма использовал *метод бесконечного спуска*, который он изобрел и которым очень гордился.

Суть метода заключается в следующем: если из предположения, что некоторое натуральное число обладает данными свойствами, следует существование меньшего натурального числа с теми же свойствами, то никакое натуральное число не может обладать этими свойствами. Как признавался Ферма в своем письме (1659) к Каркави, все теоремы в теории чисел он доказал с помощью этого метода.

Больше трех веков лучшие умы человечества бились над доказательством Великой теоремы Ферма. В процессе поиска решения было сделано много открытий и проложены новые направления в математике, что и дало повод называть теорему *Великой*. Лишь в конце XX столетия были разработаны чрезвычайно сложные средства, которые позволили положительно решить данную проблему. Последнюю точку поставил (1995) американский математик Э.Уайлс. Это последняя из задач Ферма, которая долгое время не была решена и которая все-таки поддалась усиленному натиску математиков. Поэтому ее называют также *Последней* теоремой Ферма.

В заключение приглашаем читателей еще раз обратиться к известному портрету Ферма. Он в судейской мантии; благородное лицо; умные, пронзительные глаза; спокойный, доброжелательный взгляд человека, находящегося в полной гармонии с самим собой и окружающим миром. Таким передал нам художник облик Пьера Ферма – одного из лучших юристов своего времени и одного из самых выдающихся математиков всех времен.

Под сенью яблони в цвету

А. ВАСИЛЬЕВ

ИСААК НЬЮТОН РОДИЛСЯ в рождественскую ночь 25 декабря 1642 года (4 января 1643 года по новому стилю) в деревушке Вулетори в семье небогатого фермера. Его отец скоропостижно скончался через полгода после свадьбы, а мать, женщина необычная и понимающая, живая и добрая, вышла замуж за престарелого пастыря, когда Исааку было 2 года, оставив его на попечение бабушки. В детстве Исаак Ньютон был болезненным и замкнутым мальчиком. У него не было друзей, но рано проявились выдающиеся способности – он легко выигрывал в любые игры, требующие размышления (хотя это и не прибавляло ему популярности у сверстников), мастерил различные поделки и игрушки.

Среди родственников Ньютона были фермеры, священники, доктор и аптекарь, поэтому альтернативными возможностями для него были фермерство, духовная или медицинская профессия. В результате было решено дать Исааку приличное образование, и он был отправлен в школу в близлежащий город Грантэм. Вначале, как это ни странно, Исаак не проявил большой любви к учебе и оказался на предпоследнем месте по успеваемости. Но, поссорившись с одним из одноклассников, он решил доказать свое превосходство и без особых усилий стал лучшим учеником в классе. Одновременно он продолжал конструировать модели мельниц, водяных и солнечных часов, запускал воздушные змеи с прикрепленными к ним фонариками, а во время сильного шторма прыгал по и против ветра, чтобы испытать его силу (впоследствии Ньютон назовет это первым своим экспериментом).

Затем последовал длительный период учебы и работы в Тринити-колледже Кембриджского университета, куда он поступил в 1661 году. В результате длительной гражданской войны доходы Кембриджа, и в особенности Тринити-колледжа,

уменьшились, старые порядки и традиции ушли в прошлое, а новые не были созданы, так что ученики были предоставлены самим себе. Впрочем, Ньютон сумел использовать это время весьма эффективно, изучая множество научных трактатов. Единственным учителем, оказавшим на него значительное влияние, был Исаак Барроу; именно он привил молодому Ньютону любовь к оптике и математике, а также к химическим и алхимическим опытам.

Когда с 1655 по 1667 год студенты были распущены по домам из-за свирепствовавшей в Англии эпидемии чумы, Ньютон продемонстрировал, что он является уже вполне сложившимся и очень талантливым ученым. Именно с этим периодом связаны легенда о яблоке и размышления о всемирном тяготении, в это же время был сделан и ряд математических открытий.

Некоторые показания очевидцев свидетельствуют о том, что история с яблоком и на самом деле имела место. Так, Стаклей описывает следующую сцену: «После обеда погода была жаркая; мы перешли в сад и пили чай под тенью нескольких яблонь; были только мы вдвоем. Между прочим, сэр Исаак сказал мне, что точно в такой же обстановке он находился, когда впервые ему пришла в голову мысль о тяготении. Она была вызвана падением яблока, когда он сидел, погруженный в думы. Почему яблоко всегда падает отвесно, подумал он про себя, почему не в сторону, а всегда к центру Земли? Должна существовать притягательная сила в материи, сосредоточенная в центре Земли. Если материя так тянет другую материя, то должна существовать пропорциональность ее количеству. Поэтому яблоко притягивает Землю так же, как Земля яблоко. Должна, следовательно, существовать сила, подобная той, которую мы называем тяжестью, простирающаяся по всей вселенной».

Сохранилось и свидетельство самого Ньютона об этом открытии: «В

том же году (1666) я начал думать о тяготении, простирающемся до орбиты Луны, и нашел, как оценить силу, с которой шар, вращающийся внутри сферы, давит на поверхность этой сферы. Из правила Кеплера о том, что периоды планет находятся в полуторной пропорции к расстоянию от центров их орбит, я вывел, что силы, удерживающие планеты на их орбитах, должны быть в обратном отношении квадратов их расстояний от центров, вокруг коих они вращаются. Отсюда я сравнил силу, требующуюся для удержания Луны на ее орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и нашел, что они почти отвечают друг другу».

Очевидно, Ньютон в это время уже пришел к окончательной формулировке закона всемирного тяготения, но он не только не торопился его опубликовать (из-за нежелания представлять свои труды на суд общественности Ньютон впоследствии был втянут в целый ряд споров о приоритете), но на время вообще забыл о механике. В те же «чумные» годы Исаак Ньютон активно занимается математическими проблемами: он производит разложение математических рядов, вводит так называемый бином Ньютона, а также закладывает основу интегрального и дифференциального исчисления. Попутно решает ряд важнейших задач анализа: решение простейших дифференциальных уравнений, определение минимумов и максимумов функций, нахождение касательных и подкасательных, определение кривизны и точек перегиба кривых, вычисление площадей, замыкаемых кривыми, и длин отрезков кривых. Но поскольку Ньютон не стал публиковать информацию о своих открытиях и изложил свой метод лишь в научной переписке с Коллинсом, то в Европе широкую известность получило дифференциальное исчисление, созданное Лейбницем самостоятельно через несколько лет после Ньютона, и интегральное исчисление Бер-

нулли, прижились и введенные ими обозначения.

Вернувшись в Тринити-колледж, Исаак Ньютон увлекся проведением экспериментов по оптике. Оптические исследования проводились им не менее 15 лет (с 1666 по 1680 г.) и означали для своего времени полный переворот в учении о свете. Им был сконструирован первый отражательный телескоп, получивший одобрение короля и позволивший молодому ученому стать членом Лондонского Королевского общества. Ньютон открыл и исследовал такие явления, как хроматическая аберрация и так называемые кольца Ньютона. Основным его научным вкладом в оптику было то, что он первым сумел понять, что при всем видимом многообразии цветов существуют простые, или монохроматические, лучи, не меняющиеся по цвету ни преломлением, ни отражением. Другим открытием явилось установление периодических свойств у простых, монохроматических, цветов. Вместо субъективных цветов простые световые лучи можно было с этих пор характеризовать численно, посредством «длины волны», если применить современный термин, или световых «припадок», как говорил сам Ньютон. Хотя принято считать, что Ньютон был непреклонным приверженцем корпускулярной теории света, но из переписки с Гуком следует, что Ньютон затем пришел к выводу, что в свете есть и черты, которые проще всего понять как результат движения потока частиц, и другие свойства (периодичность), легче всего объясняемые на основе представления о волнах, сторонниками которого были Гук и Гюйгенс. Предваряя современное представление о природе света, Ньютон считал его своеобразным синтезом корпускул и волн, хотя конкретной формы этого синтеза он и не предложил.

Таким образом, Ньютон одновременно был как прекрасным экспериментатором, так и замечательным математиком. И лучше всего ему удалось сочетать эти два таланта в наиболее известной работе «Математические начала натуральной философии», которая была опубликована в середине 1687 года, а уже в 1691 году исчезла с книжного рынка. В этой книге были изложены не только результаты размышлений самого Ньютона, но и был подведен

итог всему сделанному за предшествующие тысячелетия в учении о простейших формах движения материи, была создана стройная система классической физики. Изложенное здесь учение о пространстве, времени, массе и силах давало общую схему для решения любых конкретных задач механики, физики и астрономии. В «Математических началах натуральной философии» Ньютон противопоставил физику принципов физике гипотез (его личным девизом было «гипотез не измышляю»).

План этой работы таков. Вначале вводятся определения основных физических понятий – массы, количества движения, силы и т.д., затем идут аксиомы, или законы движения. В первой книге рассматривается ряд динамических задач, относящихся к движению материальных точек и твердых тел. Решаются основные вопросы о законе центральной силы при заданной орбите и делаются попытки подойти и к обратной проблеме. Цель второй книги – нанести сокрушительный удар по вихревой теории Декарта (даже название ньютоновской работы перекликается с «Началами философии Декарта»), основная тема – гидродинамические и гидростатические задачи, законы движения тел в сопротивляющейся среде, волновое движение, простейшие случаи вихревых движений. Третья книга называется «О системе мира» – именно здесь был изложен закон всемирного тяготения и решались многие астрономические задачи.

Основным выводам Ньютона предпосланы следующие «Правила философских умозаключений», которые указывают на эмпирический характер науки и на четкость ее математического описания:

«Правило 1. Не должно требовать в природе других причин, сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Правило 2. Посему, поскольку возможно, те же причины должно приписывать проявлениям природы одинакового рода.

Правило 3. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило 4. В экспериментальной философии предложения, выведенные из явлений с помощью общей индукции, должны быть почитаемы за точные или приближенно верные, несмотря на возможность противных им гипотез, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подверженными исключениям.»

На основании вышеизложенных правил и после введения определенных ученым устанавливает три знаменитых аксиомы движения, известные сейчас как законы механики Ньютона:

1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

2. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

3. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.»

Согласно современным представлениям и терминологии, в первом и втором законах под телом следует понимать материальную точку, а под движением – движение относительно инерциальной системы отсчета. Эти законы – результат обобщения наблюдений, опытов и теоретических исследований многих ученых, в том числе Галилея, Гюйгенса и самого Ньютона. Эти законы перестают быть справедливыми для движения объектов очень малых размеров, сравнимых с размерами атомов, где действует квантовая механика, и при движениях со скоростями, близкими к скорости света, где работает теория относительности Эйнштейна. Однако механика Ньютона не противоречит этим новым открытиям – она является только их предельным, крайним случаем, который никогда не потеряет своего огромного значения.

Применяя свои принципы к движению планет и комет, к движению Луны, явлениям падения тел на земной поверхности, к приливам, Нью-

(Окончание см. на с. 29)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1771» или «Ф1778». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1771–М1780, Ф1778 – Ф1787

М1771. В результате деления числа $\underbrace{111\dots11}_{3^n \text{ единиц}}$ (n – натуральное) на 3^n получили число M . Докажите, что число M целое и его можно разложить на n различных множителей.

Д. Мамедьяров

М1772. Каждое число последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$ равно 2, 5 или 9. При этом $a_1 = a_{2n+1}$, но любые два соседних числа различны. Докажите равенство

$$a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_3 a_4 - \dots + a_{2n-1} a_{2n} - a_{2n} a_{2n+1} = 0.$$

В. Произволов

М1773. Высота CD и биссектриса AE прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) пересекаются в точке F (рис.1). Пусть G – точка пересечения прямых ED и BF .

Докажите, что площади четырехугольника $CEGF$ и треугольника BDG равны.

И. Жук

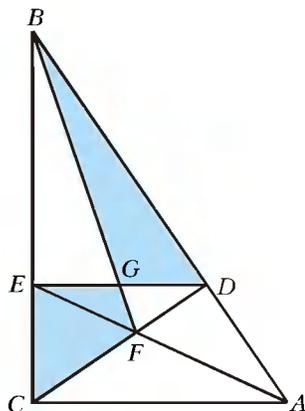


Рис.1

М1774. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B , то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A .) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй

– третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого съесть.

О. Мельников

М1775. а) Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy = \pm 1$? б) Докажите, что существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых – начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy = 1$, а четвертая – на гиперболе $xy = -1$. в) Докажите, что площадь любого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$.

г) Рассмотрим для любого такого параллелограмма $OABC$ порожденную им решетку, т.е. множество таких точек M , что $\vec{OM} = k\vec{OA} + l\vec{OC}$, где k, l – целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами $xy = \pm 1$, не содержит ни одной точки этой решетки, кроме начала координат.

Н. Осипов

М1776. Час назад каждый брат в семье был в ссоре с одинаковым количеством сестер, а каждая сестра – с различным количеством братьев. Сейчас некоторые из них помирились, и каждая сестра в ссоре с одинаковым количеством братьев, а каждый брат – с различным количеством сестер. Сколько сестер и братьев в этой беспокойной семье?

И. Акулич, А. Жуков

М1777. В квадрат со стороной 1 вписан четырехугольник. Его стороны являются гипотенузами четырех прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность (рис.2). Докажите, что сумма радиусов этих

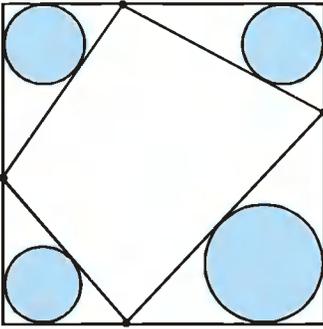


Рис.2

окружностей не превосходит $2 - \sqrt{2}$ и достигает этого числа лишь тогда, когда стороны вписанного четырехугольника параллельны диагоналям квадрата.

В.Произволов

M1778*. На доске написано комплексное число $1 + i$. Разрешается любое число раз и в любом порядке проделывать следующие три операции:

- 1) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен два числа, равных $(a + 1) + bi$;
- 2) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен три числа: $(a + 1) + bi$, $a + (b + 1)i$ и $(a + 1) + (b + 1)i$;
- 3) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен четыре числа, два из которых равны $a + (b + 1)i$, а два других равны $(a + 1) + (b + 1)i$.

После нескольких таких операций оказалось, что модули всех написанных чисел больше 3. Докажите, что среди чисел есть два одинаковых.

И.Воронович, И.Акулич

M1779. Найдите все многочлены f

- а) такие, что $f(x) + f(y) = f(x + y)$;
- б) такие, что $af(x) = f(2001x)$, где a – некоторое число;
- в) такие, что $af(x) + bf(y) = f(cx + dy)$, где a, b, c, d – некоторые числа.

В.Сендеров

M1780*. Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет. Докажите, что найдутся три одноцветные точки, которые являются вершинами равностороннего треугольника.

В.Произволов

Ф1778. Человек, стоящий на большом расстоянии h от длинной ровной стены, освещает ее лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω . Как зависит от времени скорость светового пятна, бегущего по стене, с точки зрения этого человека? Нарисуйте график этой зависимости.

В.Шелест

Ф1779. Две вертикальные параллельные пластины – одна совершенно гладкая, другая очень шероховатая – расположены на расстоянии D друг от друга (рис.3). Между ними помещена катушка с внешним диаметром D , вся масса M которой сосредоточена в ее оси. Катушка зажата пластинами так, что может двигаться вниз вращаясь, но не проскальзывая относительно шероховатой пластины. На внутренний цилиндр катушки диаметром d намотана легкая нить, к которой привязан груз массой m . Найдите ускорение этого груза.

Рис.3

З.Рафаилов

Ф1780. В глубоком космосе, вдали от всех тяготеющих масс, находятся три тела малых размеров, массы которых M, M и $3M$. Как они могут двигаться, чтобы расстояния между любыми двумя телами оставались все время постоянными и не превышали по величине L ?

Р.Александров

Ф1781. Порция гелия в циклическом процессе вначале адиабатически расширяется, при этом температура газа уменьшается от 500 К до 499 К, затем сжимается изобарически до первоначального объема и, наконец, нагревается изохорически до первоначальной температуры. Найдите наименьшее значение температуры в этом цикле, а также КПД цикла.

З.Циклов

Ф1782. В упрощенной модели гимназии школьники изображаются цилиндрами одной и той же высоты. Площадь зала для отдыха гимназистов на перемене составляет 200 м^2 . На этой площади хаотически расположены 100 десятиклассников диаметром 0,5 м каждый; они практически неподвижны. Пятиклассник половинного диаметра бежит по залу со скоростью 3 м/с. Натыкаясь на десятиклассника, он набивает себе шишку, но после отражения продолжает свое движение. Оцените, сколько шишек он себе набивает за перемену длительностью 15 минут?

М.Учителев

Ф1783. Два одинаковых точечных заряда Q находятся на расстоянии d друг от друга. Какой потенциал может иметь эквипотенциальная поверхность, если она охватывает оба заряда? Какой потенциал должна иметь такая поверхность, чтобы быть всюду выпуклой?

С.Кротов

Ф1784. Батарейки напряжениями 3 В, 6 В и 9 В соединены «минусами», а положительные их выводы свободны – такое соединение называют «звездой». К ним подключают «звезду» из резисторов сопротивлением 100 Ом, 100 Ом и 200 Ом, как показано на рисунке 4. Что покажет вольтметр с большим сопротивлением, если его

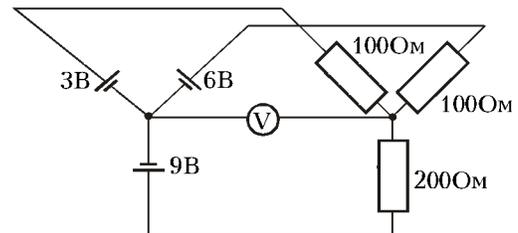


Рис.4

включить между общими точками «звезд»? Заменим вольтметр амперметром, имеющим очень малое сопротивление. Что он покажет? Заменим амперметр резистором, имеющим сопротивление 17 Ом. Какой ток через него потечет?

Р.Схемов

Ф1785. Три одинаковых конденсатора емкостью $C = 1000 \text{ мкФ}$ каждый, ключ и два резистора сопротивлениями $r = 10 \text{ Ом}$ и $R = 10 \text{ кОм}$ собраны в схему, приведенную на рисунке 5. Один из конденсаторов заряжен до напряжения U_0 . Замкнем ключ. Какое количество теплоты выделится за первую секунду в резисто-

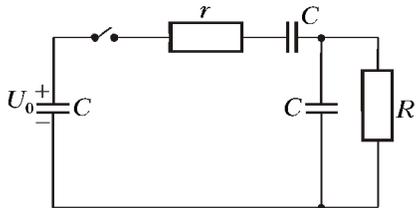


Рис.5

Ф1786. На рисунке 6 приведена схема, собранная из катушки индуктивностью 1 Гн, конденсатора емкостью 1 мкФ, идеального амперметра и двух резисторов сопротивлениями по 100 Ом. Схема подключена к источнику переменного напряжения $U = 100 \cos 1000t$. Найдите показания амперметра.

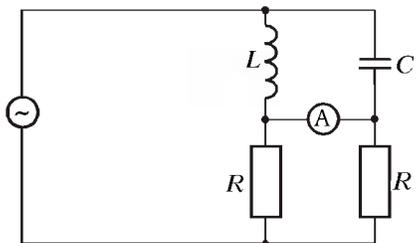


Рис.6

Ф1787. Плоская световая волна, ее длина волны 0,55 мкм соответствует зеленому цвету, падает перпендикулярно на плоский непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. На расстоянии 0,2 м находится лист бумаги, расположенный параллельно экрану. При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность в самой близкой к центру отверстия точке листа бумаги? При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность этой точки одновременно для длин волн 0,4 мкм и 0,7 мкм?

А.Зильберман

Решения задач М1751—М1755, Ф1763—Ф1772

М1751. Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с k городами другой, причем из любого города этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. (Города одной страны рейсы этой авиакомпании не соединяют.) Из-за финансового кризиса пришлось закрыть один рейс. Докажите, что теперь по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.

Зададим города каждой страны точками. Если два города соединены авиарейсом, то соответствующие им точки соединим линией. Из каждой точки получившейся схемы (графа) будут выходить ровно k линий. Поскольку из каждого города можно долететь в любой другой, то $k \geq 2$. Предположим, что после отмены одного рейса из какого-то города невозможно попасть в некоторый другой. Это эквивалентно существованию в построенном графе линии, удаление которой приводит к тому, что граф распадется на две части. Рассмотрим одну из них. Пусть в ней p_1 точек соответствуют городам первой страны, p_2 — городам второй страны, а удаленная линия выходит из точки, соответствующей городам первой страны. Тогда из точек, соответствующих городам первой страны, выходит $(p_1 k - 1)$ линий, а из точек, соответствующих городам второй страны, $p_2 k$ линий. Поскольку это одни и те же

ре сопротивлением r ? Какое количество теплоты выделится в нем за следующие 100 секунд? Элементы цепи считать идеальными.

А.Старов

линии, то $p_1 k - 1 = p_2 k$. Последнее равенство невозможно, так как его правая часть делится на k , а левая нет. Поэтому наше предположение о существовании такого рейса ошибочно.

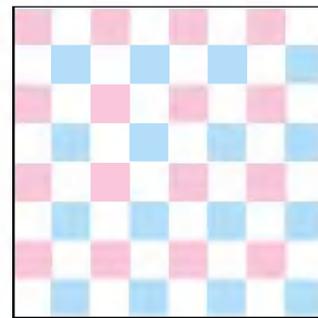
О.Мельников

М1752. Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 24^2 .

Если не выдвигать ограничений на цвет полей, то 8 ладей допустимым образом можно расставить 8! различными способами; вообще для доски размером $n \times n$ число способов расстановки n ладей равно числу перестановок из n элементов, т.е. $n!$.

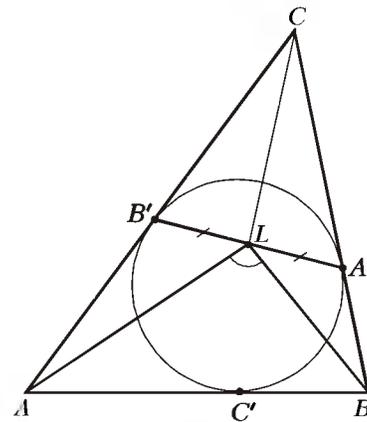
Но нам нужно учесть ограничение на цвет полей: ладьи расставляются только на черных полях доски. Перекрасим черные поля доски в красный и синий цвета. При этом всякое черное поле, расположенное на нечетной вертикали (но на четной горизонтали), сделаем красным, а всякое черное поле, расположенное на четной вертикали (но на нечетной горизонтали), сделаем синим (см. рисунок). Из 8 ладей, стоящих допустимым образом на черных полях, 4 ладьи окажутся на красных полях, а остальные 4 ладьи — на синих.



Красные поля образуют как бы отдельную шахматную доску размером 4×4 , поэтому число способов расстановки 4 ладей на красных полях равно $4! = 24$. То же можно сказать о синих полях. В результате число способов для допустимых расстановок 8 ладей равно 24^2 .

В.Произволов

М1753. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках A' , B' , C' , точка L — середина отрезка $A'B'$ (см. рисунок). Докажите, что угол ALB — тупой.



Введем обычные обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, p — полупериметр $\triangle ABC$.

Так как $CA' = CB' = p - c$ и CL — биссектриса угла C , $CL = (p - c) \cos(C/2)$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ACL и BCL , получим

$$AL^2 = b^2 + (p - c)^2 \cos^2(C/2) - 2b(p - c) \cos^2(C/2),$$

$$BL^2 = a^2 + (p - c)^2 \cos^2(C/2) - 2a(p - c) \cos^2(C/2),$$

$$\begin{aligned} AL^2 + BL^2 - c^2 &= 2(ab \cos C - p(p - c) \cos^2(C/2)) = \\ &= 2(ab - p(p - c) - ab \operatorname{tg}^2(C/2)) / (1 + \operatorname{tg}^2(C/2)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$ab - p(p-c) = ((p-a) + (p-c))((p-b) + (p-c)) - \\ - (p-c)((p-a) + (p-b) + (p-c)) = (p-a)(p-b), \\ \operatorname{tg}^2(C/2) = r^2/(p-c)^2 = (p-a)(p-b)/p(p-c),$$

а $p(p-c) < ab$, выражение $AL^2 + BL^2 - c^2$ отрицательно, т.е. угол ALB тупой.

А.Заславский

M1754*. Каждое число натурального ряда окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдется бесконечная возрастающая последовательность четных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такая, что последовательность

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots, a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}, \dots$$

одноцветна.

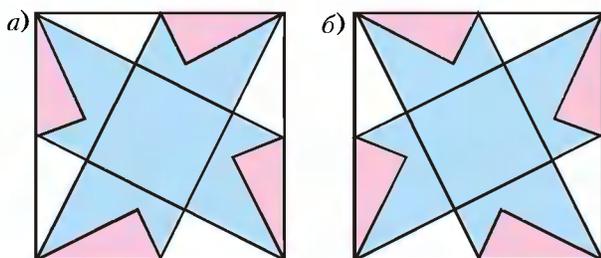
Если любое четное черное число есть начало некоторой одноцветной 3-членной арифметической прогрессии, то все доказано. Предположим, что все 3-членные арифметические прогрессии, начинающиеся некоторым четным черным числом a , не являются черными. Рассмотрим множество $a + 2\mathbf{N} = \{a + 2n; n \in \mathbf{N}\}$. Если для каждого белого числа из $a + 2\mathbf{N}$ имеется одноцветная 3-членная арифметическая прогрессия, то все ясно. Выберем белое число b из $a + 2\mathbf{N}$, из которого не выходит ни одна 3-членная белая арифметическая прогрессия. Положим $d = b - a$ и рассмотрим множество $b + d\mathbf{N}$. Если, начиная с некоторого номера, все элементы множества $b + d\mathbf{N}$ одноцветны, то все ясно. Поэтому найдется такой номер n , что число $b + dn$ белое, а число $b + d(n+1)$ черное.

Положим $c = b + \frac{dn}{2}$ и заметим, что c — целое число, поскольку d четно. Если c белое, то $b, c, b + dn$ — белая прогрессия. Если же c черное, то $a, c, b + d(n+1)$ — черная прогрессия. Получили противоречие с выбором чисел a, b .

В.Васильева, И.Протасов

M1755*. Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

Предъявим должное покрытие десятью салфетками квадратного стола. Будем считать лицевую сторону каждой салфетки синей, а изнаночную — красной. Расположение первых пяти салфеток на столе показано на рисунке а, расположение остальных пяти салфеток показано на рисунке б. (Обратите внимание на загнутые уголки салфеток!) Совмещение двух расположений на одном



квадратном столе дает покрытие салфетками такое, что каждый участок стола покрыт в два слоя.

В.Произволов

Ф1763. При компьютерном моделировании создан мир, в котором скорость звука $c_1 = 3$ м/с, а скорость света $c_2 = 8$ м/с. Маленький автомобиль едет со скоростью $v_0 = 5$ м/с вдоль прямой, наблюдатель находится на расстоянии $L = 20$ м от этой прямой. В каком месте он видит автомобиль в тот момент, когда звук мотора слышен из ближайшей к наблюдателю точки прямой? (Считайте, что наблюдатель способен верно определить направление на источник приходящего звука.)

Испущенный из ближайшей точки звук пройдет расстояние L за время L/c_1 . За это время автомобиль переместится в точку, удаленную на расстояние $v_0 L/c_1$. Однако наблюдатель увидит его не в этой точке, а ближе. Обозначим расстояние до искомой точки буквой x (см. рисунок). Тогда x можно найти из уравнения

$$\frac{L}{c_1} = \frac{x}{v_0} + \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{c_2}.$$

После очевидного преобразования получим

$$\frac{L^2}{c_1^2} - \frac{2Lx}{c_1 v_0} + \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{x^2 + L^2}{c_2^2}.$$

Легко найти ответ в буквенном виде, однако выпишем сразу числовые ответы:

$$x_1 \approx 17 \text{ м и } x_2 \approx 92 \text{ м.}$$

Очевидно, что второй ответ нам не подходит, потому что x должно быть меньше $v_0 L/c_1 \approx 33$ м. Лишний корень мы получили, возводя в квадрат обе части исходного уравнения.

З.Рафаилов

Ф1764. Найдите ускорение тележки, на которой находятся два груза (см. рисунок). Стол гладкий, коэффициент трения между тележкой и грузами μ .

При малых значениях F система останется в покое. По мере увеличения силы при некотором ее значении малый груз начнет проскальзывать по тележке, а большой груз будет двигаться вместе с тележкой. При еще больших значениях силы проскальзывать будут оба груза.

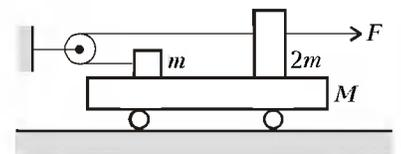
Рассмотрим сначала случай частичного проскальзывания. Обозначим буквой a ускорение тележки, а значит, и большого груза, тогда ускорение малого груза будет направлено в противоположную сторону и по величине тоже будет a :

$$F - \mu mg - T = (2m + M)a,$$

$$T - \mu mg = ma,$$

где T — натяжение нити. Отсюда получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{M + 3m}.$$



При $F \leq 2\mu mg$ движения нет.

Найдем критическое значение силы $F_{кр}$, при котором начнется проскальзывание большого груза. В этом случае сила трения между тележкой и большим грузом достигнет своего максимального значения $2\mu mg$. Проще всего записать уравнение для тележки:

$$2\mu mg - \mu mg = M \frac{F_{кр} - 2\mu mg}{M + 3m},$$

откуда

$$F_{кр} = 3\mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Если $F > F_{кр}$, то оба груза проскальзывают. Обозначим ускорение большого груза b , тогда ускорение малого тоже равно b , но направлено в противоположную сторону. Запишем уравнения движения тележки, большого груза и малого груза соответственно:

$$2\mu mg - \mu mg = Ma,$$

$$F - T - 2\mu mg = 2mb,$$

$$T - \mu mg = mb.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a = \frac{\mu mg}{M}, \quad b = \frac{F - 3\mu mg}{3m}.$$

Р.Александров

Ф1765. Пучок протонов направляется в камеру Вильсона. На одной из фотографий (цепочек капелек пара) зафиксирована картинка, на которой три отрезка прямых выходят из одной точки, отрезки составляют между собой углы 90° , 120° и 150° . Картинка соответствует акту упругого столкновения протона с одним из неподвижных ядер. Установите по фотографии, что это может быть за ядро.

Очевидно, что одна из линий соответствует траектории протона, влетевшего в камеру Вильсона. Обозначим траектории заряженных частиц номерами 1, 2, 3 (см. рисунок). Поскольку удар протона и неизвестного ядра абсолютно упругий, до и после удара сохраняются неизменными суммарный импульс протона и ядра и их суммарная кинетическая энергия.

Предположим, что линия 1 — это траектория налетающего протона. Этот случай самый простой: после удара протон и ядро разлетелись под углом 90° ; значит, масса ядра равна массе протона, т.е. произошло столкновение двух протонов.

Второй вариант для анализа — когда линия 2 является траекторией налетевшего протона. Тогда линия 1 не может быть траекторией этого протона после удара. Действительно, импульс системы должен сохраниться, а если линия 1 продолжает траекторию протона, то в этом случае для сохранения импульса нужно, чтобы скорость протона после удара стала больше, чем была до удара, что, естественно, невозможно.

Далее, проекции скоростей протона на направление, перпендикулярное линии 1, до удара и после удара должны быть одинаковыми, а это возможно, если скорость протона после удара стала меньше, чем была до

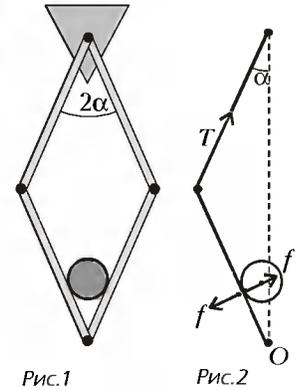
удара. Линия 3, таким образом, может быть траекторией протона после удара. Легко показать, что в этом случае отношение массы ядра к массе протона равно 2. Следовательно, возможно, что на фотографии зарегистрирован акт столкновения протона с дейтроном.

Аналогичное рассуждение можно провести, если предположить, что линия 3 — это траектория налетающего протона. Тогда линия 1 не может быть траекторией протона после удара, потому что в этом случае скорость протона после удара должна быть больше скорости до удара. Теперь кандидатом на продолжение траектории протона после удара является линия 2, однако проекции скоростей протона на направление, перпендикулярное линии 1, должны быть одинаковыми, но это возможно, только если скорость протона после удара больше скорости до удара. Таким образом, и линия 2 тоже не может быть продолжением траектории линии 3.

Итак, возможны два варианта: а) произошло столкновение протона с протоном; б) произошло столкновение протона с дейтроном.

С.Варламов

Ф1766. Из четырех одинаковых гладких легких стержней длиной L каждый, скрепленных концами шарнирно, сделан ромб (рис.1). Один из шарниров (верхний) закреплен, однородный цилиндр, помещенный внутрь ромба, находится в равновесии, верхние два стержня составляют при этом угол 2α . Найдите по этим данным диаметр цилиндра.



Запишем условие равновесия цилиндра (рис.2):

$$2f \sin \alpha = Mg,$$

условие равновесия «нижней» части системы:

$$2T \cos \alpha = Mg,$$

равенство моментов сил относительно точки O для нижнего стержня:

$$LT \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} f$$

и найдем отсюда радиус цилиндра:

$$r = \frac{2L \sin^3 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Еще нужно проверить выполнение условия $r \leq L \sin 2\alpha$. Это приводит к условию $\alpha \leq 45^\circ$, что, конечно, выполняется.

А.Зильберман

Ф1767. Два одинаковых кубика с помощью шарниров соединены двумя невесомыми и абсолютно твердыми стержнями (рис.1). К середине одного из стержней перпендикулярно ему приложена сила \vec{F} . С какими силами действуют стержни на кубик в местах прикрепления шарниров 1 и 2?

Тот же вопрос для случая, когда стержни имеют такую же массу, как и кубики.

Будем считать, что кубики находятся на гладком горизонтальном столе, а сила \vec{F} горизонтальна.

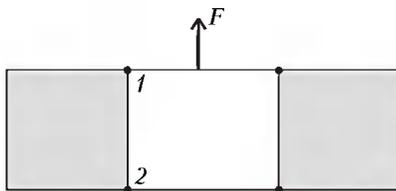


Рис.1

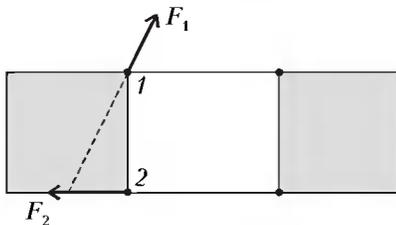


Рис.2

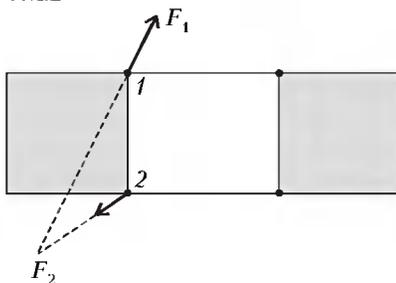


Рис.3

Для невесомых стержней равнодействующая сил, приложенных к кубику в точках 1 и 2 (рис.2), равна $F/2$, и линия ее действия происходит через центр этого кубика (подумайте, почему это так). Нижний стержень невесом, поэтому он может быть либо сжатым, либо растянутым. В нашем случае понятно, что он сжат. Со стороны этого стержня на кубик действует сила \vec{F}_2 в направлении вдоль стержня. Продолжение линии действия силы \vec{F}_1 пересекает нижнюю грань кубика в ее центре. Величины действующих на кубик сил равны

$$F_1 = \frac{F\sqrt{5}}{4} \text{ и } F_2 = \frac{F}{4}.$$

Во втором случае, когда стержни весомы, равнодействующая сил, приложенных в точках 1 и 2 (рис.3), равна $F/4$, а линия ее действия опять проходит через центр кубика. Проекции сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на направление силы \vec{F} относятся теперь как 3 к -1 и равны $3F/8$ и $-F/8$. Проекции этих сил на горизонтальное направление, перпендикулярное \vec{F} , противоположны по знаку и составляют по величине $F/8$. Окончательно для величин сил получаем

$$F_1 = \frac{F\sqrt{10}}{8} \text{ и } F_2 = \frac{F\sqrt{2}}{8}.$$

С.Варламов

Ф1768. Длинный стержень с площадью поперечного сечения $S = 1 \text{ мм}^2$ сделан из материала с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$. На один из торцов начинает действовать вдоль стержня сила $F = 1 \text{ Н}$, равномерно распределенная по площади торца. Найдите смещение этого торца за время $t = 0,1 \text{ с}$ (считайте, что упругая волна за это время не достигла другого конца стержня). Скорость звука в стержне $v_{\text{зв}} = 5000 \text{ м/с}$.

После того как к торцу стержня приложили силу, в стержне начинает распространяться упругая волна. Через время t в движении участвует длина стержня $l = v_{\text{зв}} t$ — до более удаленной части стержня еще «не дошло», что к торцу приложена сила. При неизменной силе импульс системы должен линейно возрастать со временем, а поскольку масса вовлеченной в движение части стержня линейно растет, то скорость этой части постоянна. Обозначим ее v , тогда относительная деформация вовлечен-

ного в движение куска стержня равна $\epsilon = vt/l = v/v_{\text{зв}}$. Свяжем относительную деформацию с величиной действующей силы, площадью поперечного сечения стержня и модулем Юнга:

$$\frac{F}{S} = E\epsilon = \frac{Ev}{v_{\text{зв}}}.$$

Отсюда получим

$$v = \frac{Fv_{\text{зв}}}{SE} = 2,5 \text{ см/с}.$$

Следовательно, смещение торца за время $0,1 \text{ с}$ составит $2,5 \text{ мм}$.

А.Стержнев

Ф1769. В сосуде находится воздух и некоторое количество воды при температуре $+100^\circ\text{C}$. Объем сосуда медленно увеличивают при неизменной температуре и измеряют давление внутри с точностью примерно $0,5\%$. Результаты измерений приведены в таблице:

объем, см ³	20	25	30	35	40	45
давление, кПа	140	132	126,5	108,5	95	84,5

Какое количество воды сконденсируется, если, не изменяя окончательного объема сосуда, понизить температуру до $+20^\circ\text{C}$?

Нанесем точки на график зависимости давления в сосуде от температуры. Видно, что характер графика существенно изменяется при увеличении объема выше 30 см^3 — ясно, что при этом просто «заканчивается» вода, вся она превращается в пар. Известно давление насыщенного пара воды при этой температуре — оно составляет 100 кПа . По этим данным (парциальное давление, объем и температура пара) можно легко определить и массу водяного пара в сосуде:

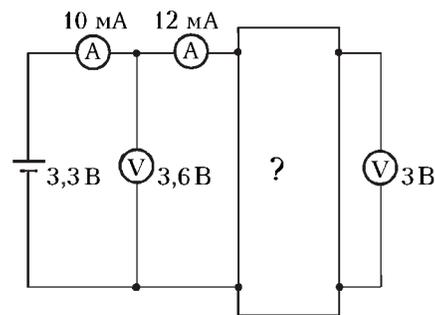
$$m = \frac{pV}{RT} = \frac{18 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-6}}{8,3 \cdot 373} \text{ г} = 0,017 \text{ г}.$$

При понижении температуры до $+20^\circ\text{C}$ давление насыщенных паров воды падает во много раз — можно считать, что практически вся масса пара конденсируется. Итак, масса конденсата воды получится $0,017 \text{ г}$.

А.Паров

Ф1770. Собрана схема, состоящая из идеальной батарейки напряжением $3,3 \text{ В}$, двух одинаковых амперметров, двух одинаковых вольтметров и «черного ящика» с четырьмя выводами (см. рисунок). Показания амперметров 10 мА и 12 мА , показания вольтметров $3,6 \text{ В}$ и 3 В . Нарисуйте возможную схему, находящуюся внутри «черного ящика» (постарайтесь придумать поподробнее!).

Внутри «черного ящика» непременно включена батарейка (один из вольтметров показывает напряжение $3,6 \text{ В}$, большее напряжения внешней батарейки $3,3 \text{ В}$). Попробуем обойтись одной батарейкой и од-



ним резистором. Падение напряжения на правом амперметре больше, чем на левом, ведь ток через него 12 мА против 10 мА. При токе 10 мА напряжение амперметра составляет $3,3 \text{ В} - 3 \text{ В} = 0,3 \text{ В}$, тогда напряжение внутренней батареейки будет равно

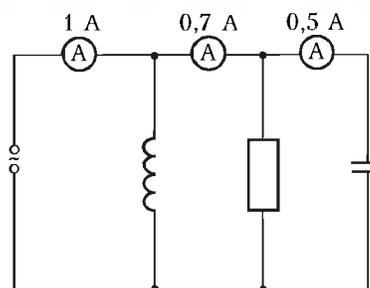
$$U = 3,3 \text{ В} + 0,3 \text{ В} \cdot 12/10 = 3,96 \text{ В}.$$

Ток левого вольтметра равен разности токов амперметров и составляет 2 мА, тогда ток правого вольтметра будет меньше – он равен $2 \cdot 3/3,6 \text{ мА}$. В этом случае сопротивление резистора внутри ящика составит

$$R = \frac{3,96 \text{ В} - 3 \text{ В}}{2 \cdot 3/3,6 \text{ мА}} = 0,576 \text{ кОм}.$$

Р.Простов

Ф1771. К источнику переменного напряжения подключены катушка, резистор и конденсатор, в цепь включены три амперметра переменного тока, показания которых 1 А, 0,7 А и 0,5 А (см. рисунок). Как изменятся



показания приборов после отключения резистора? Элементы цепи считать идеальными.

Амперметры идеальные – это значит, что элементы цепи подключены непосредственно к источнику, поэтому при отключении резистора токи катушки и конденсатора не изменятся.

Найдем ток, который течет через резистор в исходной схеме. Учитывая сдвиг фаз между токами конденсатора и

резистора, получим

$$I_R^2 = I_2^2 - I_3^2 = (0,7 \text{ А})^2 - (0,5 \text{ А})^2 = 0,24 \text{ А}^2.$$

Токи катушки и конденсатора противофазны, поэтому можно записать

$$(I_L - I_C)^2 + I_R^2 = I_1^2.$$

Для получения ответа не обязательно проводить расчет тока через катушку, достаточно найти величину «разностного» тока катушки и конденсатора:

$$I_1^{\&} = \sqrt{I_1^2 - I_R^2} = \sqrt{1 - 0,24} \text{ А} = 0,87 \text{ А}.$$

Токи второго и третьего амперметров равны и составляют 0,5 А (ток через конденсатор).

Р.Старов

Ф1772. Точечный источник света освещает экран. Вплотную к источнику подносят прозрачную полусферу из стекла с показателем преломления $n = 1,6$, плоская часть которой параллельна плоскости экрана, при этом источник «попадает» в центр круга. Во сколько раз нужно изменить излучаемую мощность источника, чтобы освещенность в центре экрана осталась такой же, как и без полусферы?

После преломления очень узкого пучка, испущенного источником в телесный угол Ω , получается пучок, выходящий практически из той же точки, но уменьшенный в сечении в n^2 раз (угол в сечении плоскостью – в n раз). Ясно, что та же излучаемая мощность приходится на меньшую в $n^2 = 2,56$ раз площадь, следовательно, можно уменьшить излучаемую мощность во столько же раз.

А.Светлов

Под сенью яблони в цвету

(Начало см. на с.21)

тон приходит и к окончательной формулировке закона всемирного тяготения. Центральным пунктом третьей книги является расчет, из которого следует, что Луна удерживается на своей орбите той же силой тяготения, под действием которой тяжелые тела падают на поверхность Земли. Далее Ньютон приходит к выводу, что «тяготение ко всей планете происходит и складывается из тяготений к отдельным частям ее» и что «тяготение к отдельным равным частицам тел обратно пропорционально квадратам расстояний мест до частиц».

Сформулировав закон тяготения, Ньютон не дал четкого ответа на вопрос, как он понимает саму природу этого явления. Решение проблемы тяготения было указано лишь в

1916 году Эйнштейном как необходимое звено общей теории относительности, охватывающей любые ускоренные движения. В теории относительности тяготение по существу не отличается от центробежной силы инерции и других инерционных эффектов, связанных неразрывно с ускоренными движениями масс. Теория Эйнштейна предсказала несколько новых явлений, связанных с тяготением: отклонение световых лучей в поле тяготения, аномалии в движении планет, смещение спектральных линий в красную сторону спектра в сильных полях тяготения.

Содержание «Математических начал натуральной философии» не исчерпывается перечисленными вопросами; во второй книге имеется много новых данных о движении тел в сопротивляющейся среде, о колебаниях и волнах в упругих телах, впервые дана теория скорости распространения звука, выводится закон трения в гидромеханике. Боль-

шое влияние этот труд оказал и на современников Ньютона, и на все последующее развитие физики.

После этого Ньютон на некоторое время отошел от активной научной работы: он стал зрителем, а затем и директором Монетного двора, одно время даже заседал в Парламенте. Но затем он был избран президентом Лондонского Королевского общества, смог оживить его деятельность, внес дух экспериментаторства и новаторства и продолжал ставить опыты до своей смерти 20 марта 1727 года. В последние годы жизни он стал менее замкнут, у него появились друзья, последователи и поклонники, он был всегда готов поддержать талантливых молодых ученых и помочь обращающимся к нему за помощью. На памятнике, воздвигнутом Ньютону в 1755 году в Тринити-колледже в Кембридже, помещена лаконичная надпись из Лукреция: «Разумом он превосходил род человеческий».

Задачи

1. Профессор Мумбум Плюмбум пытается из 8 различных цифр составить число, делящееся на любую из этих цифр. Докажите, что это ему не удастся.

Устав от безуспешных попыток составить восьмизначное число, профессор Мумбум Плюмбум решил облегчить себе задачу и теперь пытается из 7 различных цифр составить число, делящееся на любую из них. Помогите ему это сделать.

Я. Камыш



2. Клетки квадрата 100×100 раскрашены в белый и черный цвет в шахматном порядке. Квадрат разрезали на квадраты с нечетными сторонами, и в каждом квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток отмечено поровну.

О. Ванюшина

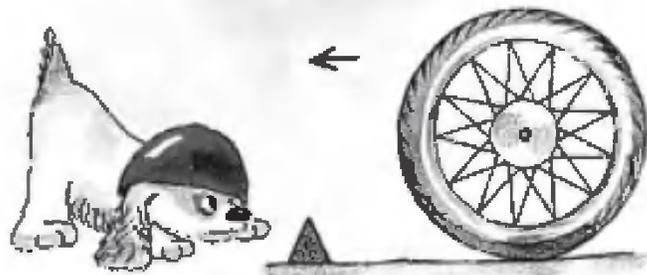


3. Рокер Вася на своем мотоцикле собирается переехать бордюр, имеющий в сечении форму правильного треугольника с длиной стороны 20 см.

– Радиус каждого колеса моего мотоцикла 30 см, – хвастается Вася. – Переехав этот жалкий бордюр, я оставлю на нем лишь нулевую длину следа!

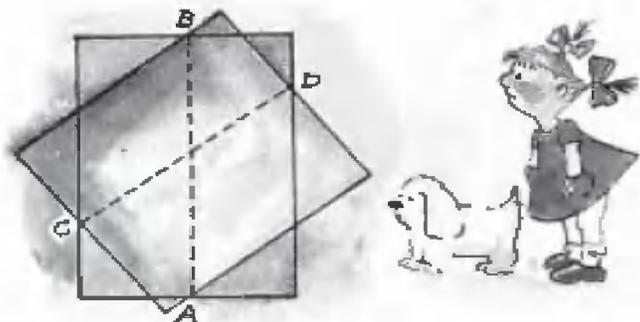
Прав ли Вася?

С. Дворянинов



4. Два прямоугольника, красный и синий, пересеклись так, что отрезок AB оказался параллельным стороне синего прямоугольника, а отрезок CD – параллельным стороне красного. Докажите, что площади прямоугольников равны.

В. Произволов



5. Один из собеседников сказал:

– Если год, когда мне исполнилось 43 года, умножить на год, когда мне исполнилось 45 лет, и поделить на год моего рождения, то получится год, когда...

– Достаточно! – прервал его второй. – Я могу назвать год твоего рождения

Назовите и вы.

И. Акулич



Чудо-дерево

А.КОТОВА

В САДУ У МАЛЬВИНЫ РОСЛИ ЯБЛОКИ И ГРУШИ, сливы и черешни, смородина и малина. Но всего замечательнее было чудесное дерево, семечко которого Мальвине подарил лесной голубь. На нем росли сразу и бананы, и апельсины.

Когда Буратино немного освоился у Мальвины (хотя очень трудно освоиться, если тебя все время воспитывают), Артемон показал ему чудо-дерево.

– Смотри, сейчас тут 25 бананов и 30 апельсинов, – сказал Артемон. – Но самое удивительное не это. Когда я утром срываю на завтрак Мальвине два плода, на их месте вырастает новый.

– Я оч-чень люблю бананы, – облизнулся Буратино. – Можно, я сорву парочку?

– Можно, – сказал Артемон. – А на дереве появится еще один апельсин.

– Почему?

– Потому что если срывать два одинаковых плода, вырастает апельсин.

– А когда вырастает банан? – поинтересовался Буратино.

– Когда срывают два разных плода, – ответил Артемон.

– Тогда я лучше сорву банан и апельсин, – решил Буратино. – Чтобы бананов не стало меньше.

Так он и сделал. Хотя апельсины он любил меньше, чем бананы, но и апельсин он тоже с удовольствием съел. А пока Буратино расправлялся с фруктами, на ветке чудо-дерева распустился цветок, через минуту отцвел, и на его месте начал расти отличный золотистый банан, обещающий стать не хуже остальных.

– А Мальвина любит апельсины? – поинтересовался Буратино, обсасывая банановую кожуру.

– Очень, – ответил Артемон.

– Значит, она съедает по два апельсина, – сказал Буратино.

– Не обязательно, – ответил Артемон. – Иногда ей хочется бананчика.

– Но фруктов становится все меньше, – вздохнул Буратино. – И небось скоро останутся одни апельсины! Знаю я этих девчонок, они всегда самое вкусное съедят, а чтоб другим бананчики остались – не подумают.

Артемон удивленно посмотрел на Буратино.

– Не знаешь ты арифметики, – покачал он головой.

– Поч-чему? Я отлич-чно знаю арифметику!

– А ты подумай. Голова тебе на что?

Буратино обиделся и дернул пуделя за хвост. Артемон очень рассердился, отвернулся от мальчишки и перестал с ним разговаривать. Весь его вид показы-

(Окончание см. на с.34)



Никто не сомневается, что теплота может быть причиной движения, что она даже обладает большой двигательной силой: паровые машины, ныне столь распространенные, являются этому очевидным доказательством.

Никола Карно

Если, например, тереть две металлические пластинки одна о другую, то мы будем наблюдать, как исчезает движение и, наоборот, возникает тепло, и вопрос теперь может быть только о том, является ли движение причиной тепла...

Юлиус Майер

...могучие силы природы, созданные велеием творца, неразрушимы, и... во всех случаях, когда затрачивается механическая сила, получается точно эквивалентное количество теплоты.

Джеймс Джоуль

Превращение теплоты (caloric) в механическое действие, вероятно, невозможно или, в всяком случае, не обнаружено... Но следует признать, что многое из того, что относится к этим фундаментальным вопросам натуральной философии, еще окружено тайной.

Уильям Томсон (Кельвин)

Возможно превратить работу в теплоту и, наоборот, теплоту в работу, причем обе величины всегда пропорциональны друг другу.

Рудольф Клаузиус

Развитие тепла при той же зарядке одной и той же батареи <конденсаторов – А.Л.> остается тем же самым, как бы ни была изменена замыкающая батарею проволока.

Герман Гельмгольц

А так ли хорошо знакомы вам теплота и работа?

В приведенных выдержках из работ выдающихся ученых наглядно отражается интерес, проявлявшийся ими к проблеме взаимосвязи двух понятий, до поры до времени рассматриваемых как самостоятельные. Доказательство Джоулем эквивалентности воздействий на тело путем совершения работы и путем нагревания продемонстрировало возможность превращения одной формы энергии в другую, что безусловно внесло немалый вклад в открытие фундаментального закона сохранения энергии.

Помимо огромного вклада в науку, эти понятия внесли решающую лепту и в практику – без преувеличения можно утверждать, что промышленная революция не могла бы произойти, если бы люди не научились эффективно производить работу из тепла. Например, немалая часть железнодорожного транспорта, почти весь автомобильный транспорт и полностью вся авиация (включая и ракеты) представляют собой по сути тепловые машины. Однако непрерывающаяся борьба в поисках лучшего их использования имеет еще одну, не менее важную для человечества, сторону – нарастающую угрозу планетарного потепления. В ближайшие годы науке придется вплотную заняться решением этой и подобных ей глобальных проблем.

Вот почему нам стоит сегодня обратиться к этой теме. И вовсе не исключено, что понадобятся и ваши знания.

Вопросы и задачи

1. Почему сверло дрели во время работы становится настолько горячим, что может обжечь, а спички от «чирканья» и вовсе вспыхивают?

2. Какая из шин автомобиля нагреется больше при его движении – слабо или сильно накачанная?

3. Кинетическая и потенциальная энергии автомобиля, движущегося по горизонтальному пути с постоянной скоростью, остаются неизменными. На что же тогда расходуется энергия сжигаемого топлива?

4. Несколько частиц сталкиваются так, что максимально возможная часть их кинетической энергии переходит во внутреннюю. Как движутся частицы после столкновения?

5. С неподвижным шаром сталкивается движущийся шар такой же массы, после чего они движутся как одно целое. Какая доля механической энергии перешла во внутреннюю?

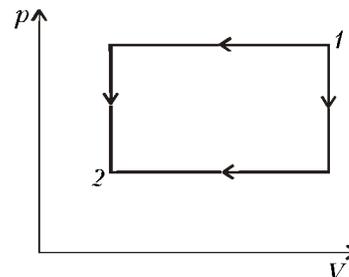
6. На наклонную плоскость втаскивают массивное тело, прикладывая к нему постоянную силу, направленную параллельно плос-

кости. Каким может быть знак работы силы реакции опоры?

7. При большой физической нагрузке в организме человека вырабатывается столько тепла, что без его рассеяния температура тела возрастала бы на 15 градусов Цельсия в час. Как же мы избавляемся от «лишнего» тепла?

8. Можно ли указать процесс, в котором газ нагревается, отдавая тепло?

9. Идеальный газ может переходить из одного состояния в другое двумя путями: первый раз сначала по изобаре, затем по изохоре; второй раз – сначала по изохоре,

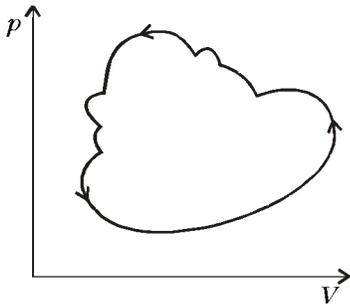


затем по изобаре. При каком переходе выделяется больше тепла?

10. В каком случае при сжатии газа в цилиндре до одного и того же конечного объема совершается большая работа: при медленном движении поршня или при быстром? Цилиндр не теплоизолирован.

11. Циклический процесс, со-

вершаемый с рабочим телом в некотором устройстве, имеет вид, показанный на рисунке. Что это за устройство: тепловая машина или холодильник?



12. Как известно, температура выхлопных газов мотоцикла на выходе из глушителя в несколько раз ниже температуры, достигаемой в цилиндре двигателя. Почему?

13. Что в конечном итоге играет роль холодильника в тепловых машинах, используемых людьми?

14. Каким путем эффективнее повышать КПД машины Карно – увеличивая температуру нагревателя при неизменной температуре холодильника или на столько же понижая температуру холодильника при фиксированной начальной температуре нагревателя?

15. Является ли отапливание помещений с помощью электронагревательных приборов энергетически наиболее выгодным?

16. Два одинаковых конденсатора зарядили до одного и того же напряжения и отключили от источника. Один из них затем сразу же разрядили, и при этом выделилось некоторое количество теплоты. В другом сначала сблизили пластины и лишь затем разрядили. Во втором случае тепловой эффект оказался меньше. Почему?

17. В однородном горизонтальном магнитном поле находятся две проводящие вертикальные рейки, верхние концы которых замкнуты на резистор. По рейкам с установленной скоростью скользит вниз массивный проводник. В какие виды энергии переходит работа силы тяжести?

Микроопыт

Распрямите, хотя бы частично, обычную металлическую скрепку

и быстро согните ее несколько раз в ту и другую сторону. Затем сразу же прикоснитесь к месту сгиба языком. Что вы почувствовали? Почему?

Любопытно, что...

...в своем сочинении «Размышления о движущей силе огня», посвященном исследованию эффективности тепловых машин, Карно ввел в научный обиход множество понятий, сохранившихся до наших дней. Главное, что в нем ученому удалось прийти к идее, лежащей в основе второго закона термодинамики, причем раньше, чем был установлен первый ее закон!

...для определения механического эквивалента теплоты Джоуль измерял нагрев жидкости, помещенной в вей электромагнит; продавливал определенное количество жидкости сквозь узкие трубы; вычислял тепло, выделявшееся при сжатии газа; наконец, применял гребное колесо для перемешивания (порознь) воды, семенного масла и ртути.

...изучение нервных волокон и энергетики мускульного сокращения, а также исследование процессов гниения и брожения послужили Гельмгольцу стимулом для написания сочинения «О сохранении силы», где впервые сформулирована ясностью был сформулирован закон сохранения энергии.

...новое понимание процессов взаимного превращения теплоты и работы нашло свое отражение в названии обобщающего труда Клаузиуса «Механическая теория теплоты», под которой он понимал термодинамику и молекулярную физику.

...автор одной из формулировок второго закона термодинамики Томсон (лорд Кельвин) преподавал пример редкого научного долголетия: он занимал кафедру натуральной философии в университете Глазго в течение 53 лет! После же своей отставки Томсон зачислил себя стажером-исследователем – для таких сотрудников не было ограничений по возрасту.

...за более чем двухвековую историю строительства тепловых двигателей КПД лучших из них едва

достиг 50% из-за запретов, наложенных самой природой перехода тепловой энергии в механическую работу.

...во время торможения спутника в атмосфере высота его орбиты уменьшается, но скорость при этом увеличивается. Снижаясь, спутник движется по спиральной траектории так, что сила тяготения совершает положительную работу, половина которой идет на увеличение кинетической энергии спутника, а другая половина переходит во внутреннюю энергию.

...изучение показаний чувствительных термометров, установленных на всех континентах, кроме Антарктиды, приводит к выводу, что за прошедшие 500 лет средняя температура Северного полушария выросла на 1,1 градуса Цельсия. Более половины этого прироста приходится на одно лишь последнее столетие, что ученые связывают с тепловым загрязнением атмосферы за счет деятельности человека.

Что читать о теплоте и работе в «Кванте»

(публикации последних лет)

1. «Расширение газа в пустоту» – 1996, Приложение №4, с.50;
2. «Тепловой насос» – 1996, Приложение №4, с.56;
3. «Внутренняя энергия и теплота» – 1997, №1, с.41;
4. «Теплоемкость идеального газа» – 1997, №2, с.45;
5. «О квантовой природе теплоты» – 1998, №3, с.7;
6. «Фазовые переходы в задачах по физике» – 1998, №3, с.50;
7. «Как зависит U от p ?» – 1998, №5, с.39;
8. «Теорема об изменении кинетической энергии» – 1999, Приложение №2, с.51;
9. «Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста» – 1999, №5, с.34;
10. «Внутренняя энергия идеального газа» – 2000, №1, с.38;
11. «Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа» – 2000, №2, с.49;
12. «Нагревать или сообщать количество теплоты?» – 2001, №2, с.31.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с.31)

вал: «С таким невоспитанным говорить мне не о чем!»

Вскоре Мальвина позвала Буратино заниматься, и как он ни старался потянуть время, все-таки пришлось сесть за стол.

– Займемся арифметикой, – сказала Мальвина, строго подняв пальчик. – Если у тебя было три яблока и некто взял у тебя одно, сколько осталось?

– Не хочу про этого противного некто, – перебил Буратино. – Лучше скажи, когда на твоём чудо-дереве кончатся все фрукты, какой будет последним? Я думаю, апельсин!

– Ну что ж, хочешь про чудо-дерево, давай про него. Сколько там бананов?

– Двадцать пять!

– А апельсинов?

– Тридцать... нет, это с утра было тридцать, потом я съел один. И банан тоже съел, только он вырос снова.

– А если бы съел два банана?

– Вырос бы апельсин, и бананов было бы меньше...

Сейчас... Двадцать пять минус два... Двадцать три!

– На сколько именно меньше?

– Да на два же, я же их съел!

– Подумай теперь, как меняется число бананов?

– Если я их не ем, не меняется. Если я съем банан с апельсином, тоже не меняется. Если я съем сразу два, их на два меньше.

– А число апельсинов как меняется?

– По всякому! Если я ем только бананы, апельсинов

еще больше станет!

– Но количество фруктов все-таки уменьшается, правда?

– Конечно, раз вместо двух всегда вырастает один.

– Значит, они когда-нибудь кончатся?

– Ну, кончатся... Жалко-то как!

– А может получится, что их останется два?

– Чего же не получится, запросто!

– Какими же они будут?

– Небось апельсинами, апельсинов-то больше!

– Ну-ну, не спеши. Ведь количество бананов если и уменьшается, то только сразу на два.

– Да, это точно, – вздохнул Буратино.

– Так разве может не остаться ни одного банана?

Ведь если он останется в какой-то момент один, вместо него всегда будет вырастать новый – ты же сможешь сорвать его только в паре с апельсином?

– Ага! А апельсинов будет все меньше и меньше, но этот последний бананчик никуда не денется!

– И два последних плода...

– ... будут банан и апельсин, и когда я их сорву, вырастет последний фрукт – бананчик! Здорово! Слушай, я пойду, поем бананов, а?

– Нет уж, – строго сказала Мальвина. – Сейчас ты у меня займешься чистописанием!

Бедный Буратино! Этого он вынести не мог. Он очень быстро довел Мальвину до слез и был посажен в чулан, откуда впоследствии убежал. Совсем не в сторону чудо-дерева. Так ему и не пришлось лично съесть последний-распоследний чудо-фрукт – спелый, сладкий банан...

« К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я

Красивые опечатки

Кривая блеска затЕМНЕНной звезды
 Конечно, не ОБАЯтельно падать вертикально
 Такая статья еСТ
 Для волн в пустоте существует ПУстое соотноше-
 ние
 Остановка травМая
 Нелегальный шах белому КРолю
 РадиКАльное плечо
 Происходит тРЕплоотдача



Возможности во много раз скОРомнее
 Индуктивность карТИНки
 Хватит ли мОДности электростанции?
 Чему равна емкость между двумя ОЧками?
 ЖестОкость выпуклых многогранников
 ПримерЯл гребное колесо для...
 Носитель рЫБообразных эмоций
 ПОРченные точки
 Нить наКАпливания лампочки
 Считая Луну тоЧеным источником...

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика точного курса» предназначена девятиклассникам, заметка «Печаль или радость» – десятиклассникам и «Эффективное напряжение в сети переменного тока» – одиннадцатиклассникам.

Кинематика точного курса

А. ЧЕРНОУЦАН

ЧТО ОБЩЕГО В ПОВЕДЕНИИ КАПИТАНА корабля, плывущего через океанские просторы, командира самолета, совершающего дальний перелет, или лодочника, пересекающего быструю реку на небольшой моторной лодке? Каждый из них должен решать сложнейшую навигационную задачу – выбрать оптимальный курс в условиях перемещения относительно движущейся среды (т.е. с учетом океанских и речных течений и переменчивых ветров).

Представьте себя для начала капитаном, приступающим к корректировке курса своего корабля. Конечно, первая (и весьма трудная!) задача – точно определить свои координаты в отсутствие каких-либо зрительных ориентиров. До изобретения радио и появления радиомаяков мореплавателям приходилось иногда дни и недели ждать, когда, наконец, откроется небо и можно будет с помощью Солнца и звезд узнать, куда тебя занесли ветры и течения, и весьма приблизительно нанести на карту свое местоположение. В наше время эта проблема существенно упростилась, и будем предполагать, что мы с ней успешно справились.

Что дальше? Обозначив на карте положение корабля, выбираем направление дальнейшего движения (в простейшем случае – точно на порт назначения, если только не надо обогнуть Бермудский треугольник или группу гигантских айсбергов). Кажется бы, осталось только отдать приказ – взять курс в этом направлении. Но нет, необходимо сначала посмотреть на карту океанских течений и, если надо, сделать соответствующую поправку. Скорость океанских и мор-

ских течений может быть не столь уж мала; к примеру, скорость знаменитого Гольфстрима достигает 10 км/ч. Как же сделать поправку на течение и определить точный курс?

Когда капитан указывает курс, рулевой поворотами руля устанавливает в этом направлении корпус корабля. (Более точно – в указанном направлении устанавливается горизонтальная ось корабля, т.е. линия, проведенная от середины кормы к носу.) Если бы не было течения, волн и ветра, то именно в этом направлении двигался бы корабль, причем со скоростью, соответствующей его ходовым характеристикам. Для каждого корабля существует индивидуальная зависимость его скорости в спокойной неподвижной воде от режима работы двигателя (от числа оборотов). Если же есть заметное течение, то скорость корабля оказывается иной как по величине, так и по направлению – корабль, как говорят, сносит течением.

Предположим для простоты, что ветер и волны отсутствуют, и перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся водой, т.е. двигающуюся со скоростью течения. В этой системе вода неподвижна, а корабль движется точно вдоль своей оси с расчетной скоростью. Значит, именно этой относительной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ управляет капитан корабля, задавая курс и число оборотов двигателя. Скорость же корабля относительно берега \vec{v} определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_B, \quad (1)$$

где \vec{v}_B – скорость воды (скорость течения).

Это векторное равенство означает, что указанные три скорости образуют треугольник (рис. 1). После определения (по карте) направления на порт

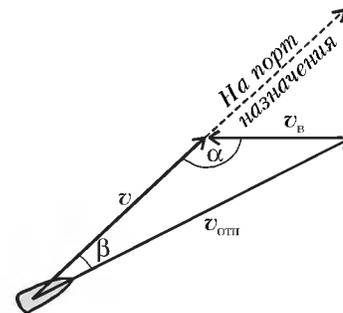


Рис. 1

назначения, т.е. направления скорости \vec{v} , и направления и величины скорости течения \vec{v}_B нам известны в этом треугольнике угол α и сторона v_B . Если капитан решает не менять число оборотов двигателя, то $v_{\text{отн}}$ тоже известна. Нам надо определить угол β – его называют углом сноса. Спроектировав равенство (1) на направление, перпендикулярное вектору \vec{v} , получим

$$0 = v_{\text{отн}} \sin \beta - v_B \sin \alpha, \quad (2)$$

откуда и находим угол β . Например, если скорость хода 30 км/ч, а скорость течения равна 4 км/ч и составляет с направлением движения угол 120° , то угол сноса составит приблизительно $6,5^\circ$.

Чтобы узнать, с какой скоростью v мы приближаемся к цели, спроектируем равенство (1) на направление вектора \vec{v} и найдем

$$v = v_{\text{отн}} \cos \beta + v_B \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставляя численные данные для разобранного примера, получим, что скорость v равна примерно 27,8 км/ч.

Впрочем, можно поставить задачу немного иначе. Если задаться целью прибыть в порт назначения точно в срок, то надо поддерживать скорость движения v постоянной. Необходимую для этого $v_{\text{отн}}$ можно найти из теоремы косинусов:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v^2 + v_B^2 - 2vv_B \cos \alpha}, \quad (4)$$

после чего можно по формуле (2) определить угол сноса β . Так, в нашем примере для поддержания скорости корабля 30 км/ч надо увеличить число оборотов так, чтобы относительная скорость равнялась 32,2 км/ч, а угол сноса сделать равным примерно $6,2^\circ$.

Отметим, что кроме течения есть и другие факторы, влияющие на направление и величину скорости корабля. Это, в первую очередь, сильный ветер, создающий дополнительное боковое давление на борт (можно сказать, что корабль движется не в одной подвижной среде, а в двух – водной и воздушной). При ветре направление движения корабля относительно воды может немного отличаться от направления его оси. Кроме того, дополнительное отклонение возникает за счет регулярных ударов волн, если они придутся на один из бортов. Учесть эти факторы можно только приблизительно, и поэтому надо периодически замерять координаты корабля и производить корректировку курса.

Теперь давайте пересядем на самолет, совершающий многочасовой перелет, и попробуем учесть влияние ветра. Проблемы для воздушного лайнера во многом такие же, как для океанского. Видимые ориентиры на поверхности часто скрыты облаками, а при высоких скоростях даже небольшие ошибки в выборе курса могут быстро привести к заметным отклонениям. Конечно, летчикам не приходилось совершать дальние перелеты в эпоху до изобретения радио, но несколько десятков лет назад, до появления систем глобальной радиолокации и спутниковой связи, проблема ориентации стояла весьма остро (вспомните, например, Экзюпери). В наши дни задачу выбора курса решает не только летчик, но и находящийся с ним в постоянном контакте наземный диспетчер, который по радиолокационным данным может отслеживать положение самолета и вычислять направление и величину его скорости (относительно земли). Вдали от аэропорта, вне связи с диспетчером, летчик следит за тем, чтобы не выйти за пределы выделенного ему воздушного коридора с помощью радиомаяков, доступных ему в течение перелета.

В отличие от корабля, взаимодействующего не только с водной средой, но и с воздушной, самолет испытывает отклоняющее влияние только одной движущейся среды – воздушной. В системе отсчета, связанной с воздухом (т.е. движущейся со скоростью ветра), скорость самолета $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена вдоль его оси. Его скорость относительно земли \vec{v} можно найти с помощью формулы (1), только $\vec{v}_в$ обозначает теперь не скорость воды, а скорость воздуха (ветра). Хотя скорость самолета в десятки раз больше, чем скорость корабля, но и скорость

ветра может быть значительно больше скорости течения. При взлете и посадке скорость самолета составляет 220–280 км/ч, т.е. 60–80 м/с, а скорость бокового ветра может достигать 15–20 м/с (при более сильном ветре посадка запрещена). На высоте 8–10 км, где проходит большая часть полета, самолет летит со скоростью 600–900 км/ч (на этой высоте плотность воздуха, а значит, и лобовое сопротивление в два с лишним раза меньше), однако и ветры, регулярно дующие на этих высотах (их называют струйными), могут иметь скорость до 40–50 м/с.

Главная трудность в расчете полетного задания состоит в том, что, в отличие от морских течений, невозможно создать устойчивую карту струйных ветров, поскольку день ото дня их скорость меняется и по величине, и по направлению. Примерная схема корректировки курса выглядит следующим образом. После набора нужной высоты диспетчер задает кораблю курс (т.е. направление и величину $\vec{v}_{\text{отн}}$), исходя из предполагаемой скорости ветра (определенной при пролете по этому коридору предыдущего самолета). После этого он определяет по данным радиолокации направление и величину скорости самолета относительно земли \vec{v} . Если она заметно отличается от ожидаемой, то необходимо внести поправку на изменение скорости ветра. Зная $\vec{v}_{\text{отн}}$ и \vec{v} , можно с помощью формулы (1) определить новую скорость ветра $\vec{v}_в$ (подумайте, как это сделать) и произвести необходимую корректировку.

Особое значение боковой ветер играет при взлете и посадке. Рассмотрим, какие трудности могут возникать во время посадки, проходящей при сильном боковом ветре. С момента, когда колеса шасси коснулись земли, самолет начинает взаимодействовать не только с воздухом, но и с твердой поверхностью. При качении по полосе всеми колесами – передними и задними – самолет должен быть ориентирован вдоль линии движения, т.е. вдоль посадочной полосы (иначе возникает опасность поломки шасси или разворота корпуса самолета). Однако при приближении к полосе у самолета может быть значительный угол сноса, т.е. его корпус может быть заметно повернут по отношению к полосе. Как рассказывают летчики, при посадке на легком самолете (со сравнительно небольшой посадочной скоростью) самолет бывает повернут так, что стойка окна мешает видеть всю полосу. Вы-

ход состоит в том, что надо садиться сначала на задние колеса, после чего действующая на них сила трения быстро выравнивает корпус самолета, и можно начинать качение на полном шасси.

Теперь нам осталось только пересечь быструю речку на небольшой моторной лодке. Многое из сказанного относится и к этому случаю, но здесь может возникнуть ситуация, с которой мы раньше не встречались. Если скорость течения реки $v_в$ больше, чем скорость нашей лодки относительно воды $v_{\text{отн}}$, то совсем не все направления движения нам доступны. В частности, мы при всем желании не сможем пересечь речку и оказаться точно напротив точки отплытия. Однако мы можем постараться сделать так, чтобы нас снесло течением как можно меньше. Для этого надо, чтобы угол Φ между направлением скорости \vec{v} и перпендикуляром к линии берега был как можно меньше. «Изобразим» на рисунке 2 формулу (1) и посмот-

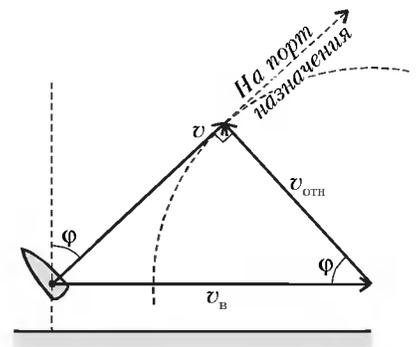


Рис. 2

рим, как будет меняться направление скорости \vec{v} при различных направлениях скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ (т.е. в зависимости от ориентации корпуса лодки). Видно, что конец вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ описывает окружность, и самый маленький угол $\Phi = \arccos(v_{\text{отн}}/v_в)$ достигается в том случае, когда вектор \vec{v} направлен по касательной к этой окружности. Для этого надо направить корпус лодки против течения под углом Φ к линии берега. Интересно, что в этом случае лодка будет плыть в направлении, перпендикулярном линии корпуса.

Чтобы проверить, насколько вы освоились с проблемой выбора курса и с законом сложения скоростей, попробуйте самостоятельно решить две такие задачи:

1. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. На сколько минут увеличится время полета, если будет дуть

боковой ветер со скоростью 20 м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха 328 км/ч. (Ответ: на 9 мин.)

2. При переправе через речку шири-

ной 80 м надо попасть в точку, лежащую на 60 м выше по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью 4,5 м/с

относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения 2,1 м/с? (Ответ: 6 м/с.)

Печаль или радость

К.БЛИОХ

ЧТО СВОЙСТВЕННО ЧЕЛОВЕКУ: грустить или радоваться, скорбеть или улыбаться, быть оптимистом или пессимистом? Этот философский вопрос на протяжении многих веков обсуждали лучшие умы человечества и, естественно, давали разные ответы. И, как всегда в таких «глубоких» вопросах, каждый был по-своему прав. Я не знаю, на какую чашу весов выпало большее число ответов, но мне почему-то кажется, что на чашу радости.

Попробуем ответить на поставленный вопрос, опираясь только на элементарную физическую основу явлений, на известные нам экспериментальные данные и на... музыку. Воспользуемся тем, что практически все люди, слушая музыку, испытывают похожие (конечно, в грубом приближении) эмоциональные переживания. В основе этого лежит музыкальный мажорно-минорный дуализм. Согласно классической теории музыки, музыкальные лады делятся на мажорные и минорные. При этом мажорные лады воспринимаются человеком как носители бодрой, радостной, светлой окраски, а минорные – унылой, печальной, сумрачной. Чем же отличаются мажорные и минорные лады с физической точки зрения?

Ноты. Музыкальные звуки записываются, в большинстве своем, нотами. Нота определяет высоту звучания данного звука, т.е. физически – основную частоту колебаний в его спектре. Шкала нот соответствует логарифму частотной шкалы. Музыкальный интервал между нотами, частота которых отличается в 2 раза, всегда равен октаве. Чтобы получить все ноты в пределах одной октавы, нужно октаву раз-

*Если можно о чем скорбеть,
Значит, можно чему улыбаться.*

С.Есенин

делить на 12 равных музыкальных интервалов – полутонов. Итак, если исходная нота (положим, до) имеет основную частоту ω_0 , то основные частоты остальных нот определяются по формуле

$$\log_2 \omega_n = \log_2 \omega_0 + n \frac{\log_2 2\omega_0 - \log_2 \omega_0}{12} = \log_2 \omega_0 + \frac{n}{12},$$

или

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12},$$

где n – целое число. При $n = 0$ формула определяет основную частоту исходной ноты, при $n = 1$ – ноты на полтона выше, при $n = -1$ – ноты на полтона ниже и т.д. При $n = \pm 12$ мы получаем основные частоты нот на октаву выше и ниже исходной.

Музыкальная шкала звуков имеет циклическую структуру. Ноты, отличающиеся на октаву друг от друга, в определенном смысле тождественны друг другу. А именно, добавление к данному созвучию (аккорду) ноты, звучащей на октаву выше уже имеющейся в нем ноты, не изменяет его эмоциональную окраску, а затрагивает только тембральную сторону его звучания. (Это связано с тем, что в спектре каждого звука присутствует, кроме основной его частоты, частота звука на октаву выше и все его обертоны – см. Дополнение). Поэтому ноты получили собственные названия только в пределах одной октавы, дальше они циклически повторяются с добавлением только номера октавы, в которой они расположены.

В таблице 1 приведены названия нот, соответствующие им числа n ,

величина и название музыкальных интервалов, которые они составляют с исходной нотой. Пунктирные линии разделяют ноты разных октав. Знаки «плюс» и «минус» перед названием и величиной интервала означают, что интервал откладывается, соответственно, вверх и вниз от начальной ноты. При сложении интервалов конечная нота первого интервала является начальной для второго.

Мажор и минор. Теперь мы можем определить понятия мажорного и минорного ладов. Мажорным (минорным) ладом называется лад, опорные звуки которого образуют мажорное (минорное) трезвучие. Мажорное (минорное) трезвучие состоит из трех звуков: первого – основного, второго – на большую (малую) терцию выше основного, третьего – на квинту выше основного. Таким образом, разница между мажором и минором заключается в положении среднего звука (терции) соответствующего трезвучия. Согласно таблице 1, до-мажорное и до-минорное трезвучия составляют ноты

до – ми – соль ($n = 0, 4, 7$)

и

до – ми-бемоль – соль ($n = 0, 3, 7$).

Поистине удивительно, что минимальное отличие в положении одной ноты определяет две основополагающие противоположности: мажор и минор, радость и печаль в нашем настроении!

Любопытно, что мажорное и минорное трезвучия являются обратными друг другу не только в эмоциональном, но и в математическом смысле. Действительно, мажорное трезвучие состоит из последовательно отложенных большой, а затем малой терции ($4 + 3$; рис.1,а). Минорное трезвучие состоит из этих же интервалов, но в обратном порядке: малая терция, затем большая ($3 + 4$; рис.1,б). Если мы зеркально отразим ноты трезвучия относительно произвольной точки нотной шкалы, то интервалы будут следовать в обратном порядке: мажорное трезвучие переходит в минорное и наоборот. А вспомнив, что нотная шкала соответствует логариф-

Таблица 1

№	Название ноты	Величина музыкального интервала	Название музыкального интервала
...
-2	ля-диез (си-бемоль)	-1 тон	-октава+малая септима (-большая секунда)
-1	си	-0,5 тона	-октава+большая септима (-малая секунда)
0	до	0 тонов	прима (унисон)
1	до-диез (ре-бемоль)	0,5 тона	малая секунда
2	ре	1 тон	большая секунда
3	ре-диез (ми-бемоль)	1,5 тона	малая терция
4	ми	2 тона	большая терция
5	фа	2,5 тона	кварта
6	фа-диез (соль-бемоль)	3 тона	тритон
7	соль	3,5 тона	квинта
8	соль-диез (ля-бемоль)	4 тона	малая секста
9	ля	4,5 тона	большая секста
10	ля-диез (си-бемоль)	5 тонов	малая септима
11	си	5,5 тонов	большая септима
12	до	6 тонов	октава
13	до-диез (ре-бемоль)	6,5 тонов	октава+малая секунда (малая нона)
...

му частотной шкалы, мы получим следующий факт: если три звука с частотами a , b , c образуют мажорное (минорное) трезвучие, то звуки с частотами a^{-1} , b^{-1} , c^{-1} будут образовывать минорное (мажорное) трезвучие.

Обертоны звуков. Каждый природный звук представим в виде суммы бесконечного числа гармоник – синусоидальных колебаний определенной частоты и амплитуды. Чем больше амплитуда, тем более существенна данная гармоника в общем звучании.

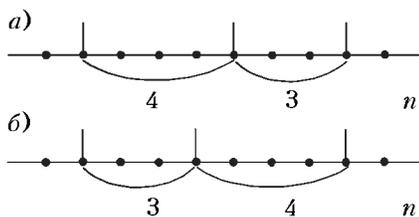


Рис.1. Мажорное (а) и минорное (б) трезвучия на нотной шкале n . При инверсии (отражении) оси n мажор и минор переходят друг в друга

Наибольшую амплитуду имеет гармоника основной частоты – основной тон. Следующие за ней (по убыванию амплитуды) гармоники называются обертонами. Частоты обертонов находятся, как правило, в одних и тех же соотношениях с частотой основного тона для любого природного звука. Связано это вот с чем.

Все звуки, которые мы слышим в природе, рождаются и усиливаются колебаниями различных физических тел. В основе этого лежит явление резонанса. Пусть тело, издающее в результате какого-то внешнего воздействия звук, имеет характерный линейный размер L . Тогда, как известно из физики колебаний, в первую очередь возбуждаются волны, для которых выполнено условие резонанса

$$L = m \frac{\lambda}{2},$$

где λ – длина звуковой волны, а m – любое натуральное число. Это условие требует, чтобы внутри тела укладыва-

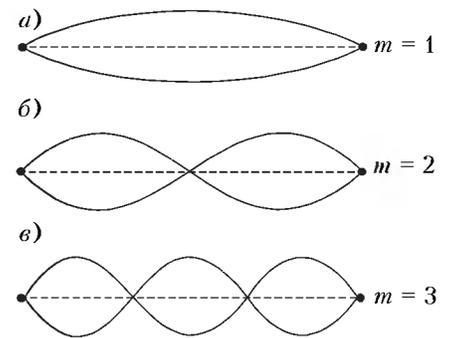


Рис. 2. Колебания струны, отвечающие: а) основному тону, б) первому обертону, в) второму обертону

лось целое число полуволн. Например, в колеблющейся струне действительно должно укладываться целое число полуволн, так как ее концы закреплены жестко и должны приходиться на узловые точки соответствующих синусоид (рис. 2). Поскольку длина звуковой волны однозначно связана с ее частотой:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

где c – скорость звука, то условие резонанса можно записать в виде

$$\omega = m \frac{\pi c}{L}.$$

При $m = 1$ эта формула описывает частоту основного тона звука:

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{L},$$

при $m > 1$ – частоты его обертонов. Число $m - 1$ является номером обертона. Чем выше обертона, тем слабее он возбуждается.

Музыка природы. Определим теперь, каким нотам соответствуют природные обертоны звука. Выразим частоты обертонов через частоту основного тона:

$$\omega_{m-1} = m\omega_0$$

и воспользуемся формулой для основных частот нот октавы:

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12}.$$

Приравняем правые части этих выражений, решим получившееся равенство относительно n и узнаем, каким нотам соответствуют обертоны звука:

$$n = 12 \log_2 m,$$

где n – уже нецелое число, поскольку, обертоны не в точности соответствуют определенным нотам. В таблице 2 приведены вычисленные приближенные значения n для первых четырех обер-

Таблица 2

///	//	Название ноты	Музыкальный интервал относительно основного тона
1	0	до	прима
2	12	до	октава
3	19,02	соль	октава + квинта
4	24	до	две октавы
5	27,9	ми	две октавы + большая терция

тонов и соответствующие им ноты, определенные по таблице 1.

Мы видим, что первые четыре обертона приближенно соответствуют нотам *до*, *ми*, *соль*, составляющим аккорд мажорного трезвучия. (Напомним, что отличие в нотах на октаву не играет роли при определении эмоционального характера аккорда.) Более того, в первых пятнадцати обертонах ноты *до*, учитываемых в музыкальной акустике, нет ноты *ми-бемоль*, которая соответствует минорному трезвучию. Заметим также, что ноты не в точности соответствуют природным обертонам звуков – мы получили нецелые значения n . Это показывает приближенность введенного европейской цивилизацией нотного строя. (Эта приближенность называется темперацией, и она необходима, чтобы построить столь удобную циклическую нотную систему (см. Дополнение).) Тем не менее, с хорошей точностью (которая удовлетворяет слушателей уже четыре столетия) можно утверждать, что в любом природном звуке, будь то звон капли дождя, скрип дерева, птичий свист или звучание музыкального инструмента, мы всегда слышим мажорный аккорд.

Итак, каждый человек (в том числе и тот, который не знает ни нотной грамоты, ни физических основ акустики) однозначно воспринимает мажорную музыку как носителя разнообразных эмоций радости, а минорную – как носителя печальных эмоций. Иными словами, человек инстинктивно или подсознательно воспринимает свойственную природе музыку как радостную и несвойственную – как печальную. А если учесть, что человек также есть часть природы, то можно предположить, что эмоции радости более свойственны человеку, нежели эмоции печали.

В заключение отметим, что приведенные рассуждения следует воспринимать лишь как любопытный факт,

демонстрирующий тесную взаимосвязь (даже на элементарном уровне) физических, культурных и духовных сфер бытия. Однако отсюда не следует делать каких-либо однозначных практических выводов. Во-первых, потому что природа устроена гораздо сложнее и богаче, а во-вторых, потому что в других сферах законы физики могут и не действовать – как известно, всякий закон имеет свою область применимости.

Дополнение. Как строится нотная система

До сих пор мы говорили о существующем нотном строе и природных обертонах звуков как о независимых явлениях. На самом деле взаимосвязь между ними не случайна, и первичными являются обертоны звуков (они существовали в природе задолго до появления человека). Представления же о музыке как об определенных гармонично звучащих созвучиях появились именно из-за взаимодействия обертонов разных звуков.

Нота первого обертона. Октава. Чтобы ввести нотную шкалу, нужна какая-то условная точка отсчета. Пусть ею будет нота с основной частотой ω_0 , частоты обертонов которой описываются формулой

$$\omega_{m-1} = m\omega_0.$$

Рассмотрим теперь ноту, построенную на первом обертоне исходной ноты: $\omega_1 = 2\omega_0$. Частоты ее обертонов будут вычисляться по формуле

$$\omega_{m-1} = m\omega_1 = 2m\omega_0.$$

Видно, что основной тон и все обертоны ноты первого обертона содержатся в обертонах исходной ноты: $(m-1)$ -й обертон первой является $(2(m-1))$ -м обертоном второй (рис. 3, а и б). Это определяет гармонию в созвучии таких нот и объясняет то, что мы воспринимаем их как эмоционально эквивалентные. Таким образом мы приходим к октаве, главно-

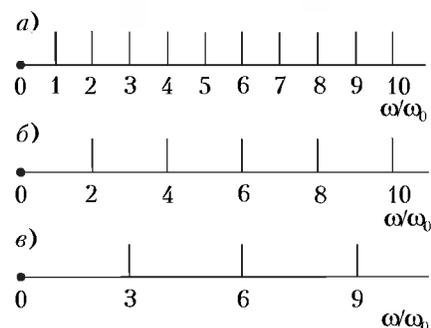


Рис.3. Частоты, соответствующие основному тону и обертонам: а) исходной ноты, б) ноты первого обертона, в) ноты второго обертона

му естественно введенному нотному интервалу.

Далее мы будем исходить из эквивалентности нот, частоты которых отличаются в 2 раза. Поэтому нотная последовательность будет обладать определенной циклическостью – достаточно определить все ноты в интервале частот $[\omega_0, 2\omega_0)$, а потом повторить подобным образом в интервалах $[2\omega_0, 4\omega_0)$, $[4\omega_0, 8\omega_0)$ и т.д. Для этого удобно изображать частоты нот в виде точек на окружности, согласно формуле

$$\alpha = 2\pi \log_2 \frac{\omega}{\omega_0},$$

где α – угловая координата, соответствующая данной частоте ω и откладываемая по часовой стрелке от нулевого значения, связанного с исходной частотой ω_0 . Из формулы видно, что увеличение частоты в 2 раза соответствует прибавлению угла 2π и оставляет точку на прежнем месте. При таком подходе октава эквивалентна нулевому элементу множества интервалов – приме, и ее недостаточно для построения нетривиальной нотной системы.

Нота второго обертона. Квинта. Чтобы получить нетривиальный интервал, рассмотрим ноту, построенную на втором обертоне исходной ноты: $\omega_2 = 3\omega_0$. Все ее обертоны $\omega_{m-1} = m\omega_2 = 3m\omega_0$ также содержатся в обертонах исходной ноты, но расположены они более редко и соответствуют более слабым (высоким) обертонам исходной ноты по сравнению с нотой первого обертона (см. рис. 3, а и в). А главное, что среди обертонов ноты второго обертона есть такие, которые не содержатся в обертонах ноты первого обертона (см. рис. 3, б и в). Поэтому можно считать, что мы имеем дело с новой, вполне самостоятельной нотой. Интервал между нотами первого и второго обертонов есть квинта. Квинте соответствует угловой интервал

$$\alpha_q = 2\pi \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2\pi(\log_2 3 - 1) \approx 2\pi \cdot 0,585,$$

откладываемый от точки исходной ноты на окружности. (Мы учли эквивалентность положения на окружности исходной ноты и ноты первого обертона.)

Построение нотной системы на квинтах. С помощью квинты уже можно построить всю нотную систему. Действительно, введенная нами начальная нота условна, нотная система не должна зависеть от ее выбора. Построив одну квинту относительно исходной ноты, мы должны отложить квинту и от полученной ноты и от всех последующих, потому что любая из них может быть выбрана в качестве начальной (рис. 4, а). Так будет

продолжаться до тех пор, пока очередная из откладываемых последовательно квинт не попадет в начальную точку и процесс замкнется. Сколько же квинт (сколько точек и различных нот на окружности) мы отложим, пока не вернемся в исходную точку (т.е. совершим целое число оборотов)? Запишем для этого условие возвращения k -й квинты в начальную точку после l оборотов:

$$k\alpha_q = 2\pi l,$$

или

$$\frac{k+l}{k} = \log_2 3.$$

Но $\log_2 3$ – иррациональное число, которое не может быть представлено в виде отношения двух целых чисел. Поэтому желаемое равенство никогда не будет достигнуто, и бесконечное число точек последовательно откладываемых нами квинт заполнит в конце концов всю окружность (см. рис.4,а). Значит, нужно вводить бесконечное число нот либо жертвовать цикличностью или симметрией нашей нотной системы?

Темперация. Выход из этого сложно-го положения оказался удивительно простым, но человечеству понадобилось более 20 веков, пока в середине XVII века он не был найден органистом Андреем Веркемейстером. (Заметим, что до него этой задачей занимались такие ученые, как Кеплер и Эйлер.) Он предложил следующее решение: раз на целом числе окружностей не укладывается целое число квинт, значит, нужно подправить квинту так, чтобы укладывалось. Оказывается, что двенадцать квинт примерно равны семи октавам, и, отложив двенадцать точек, мы совершаем примерно семь оборотов по окружности и почти попадаем в

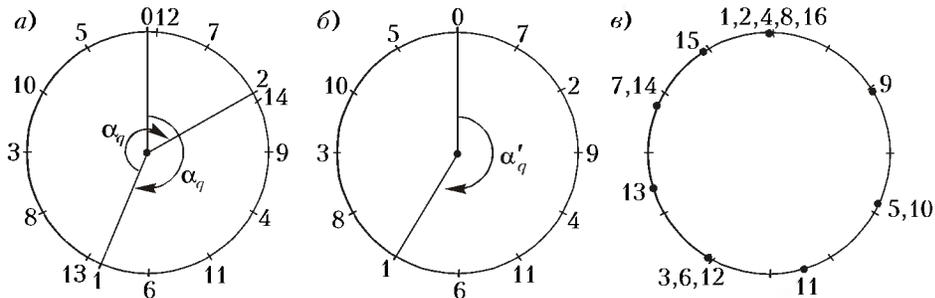


Рис.4. а) Последовательно откладываемые на окружности «чистые» квинты. Нулевая точка соответствует исходной ноте. б) Последовательно отложенные «исправленные» квинты. Двенадцатая точка попадает в начальную, и круг замыкается. в) Основной тон и первые 15 обертонов исходной ноты (точки) на фоне построенной нотной системы (черточки). Точкам, возле которых написано несколько чисел через запятую, отвечают все соответствующие обертоны

исходную точку (см. рис.4,а). Изменим величину квинты так, чтобы это попадание было точным. Тогда исправленная квинта будет соответствовать углу

$$\alpha'_q = 2\pi \cdot \frac{7}{12} \approx 2\pi \cdot 0,583.$$

Двенадцать последовательно отложенных квинт точно разбивают окружность на 12 равных частей (см. рис.4,б). Полученные точки соответствуют нотам таблицы 1, а угловой интервал $\pi/6$ между соседними точками соответствует минимальному музыкальному интервалу (полтона). Замена натуральных природных квинт искусственными и введение соответствующего приближенного строя называется темперацией (от латинского temperatio – соразмерность).

Остальные обертоны. Следующие, более высокие, обертоны звука довольно хорошо укладываются в нотную систему, построенную нами только на первых двух обертонах. Рисунок 4,в показывает

положение основного тона и первых его пятнадцати обертонов на фоне введенной нотной системы. Видно, что большинство обертонов с хорошей точностью соответствуют определенным нотам. Благодаря этому, предложенный нотный строй кажется нам естественным и гармоничным в звучании. С помощью рисунка 4,в можно также объяснить, почему одни музыкальные интервалы: прима, малая и большая терции, малая и большая сексты и октава ($n = 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12$) считаются консонансами, т.е. более благозвучными, а другие интервалы: малая и большая секунды, тритон, малая и большая септимы ($n = 1, 2, 6, 10, 11$) – диссонансами, т.е. менее благозвучными. Поворачивая построенную картину обертонов на окружности на угол $\pi/6$, можно увидеть, что для n , соответствующим консонансам, повернутые обертоны согласуются с исходными лучшим образом, чем для n , соответствующим диссонансам.

Эффективное напряжение в сети переменного тока

В.ЛАНГЕ

ПЕРСПЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ электрической энергии в технике и быту стала очевидной еще в начале XIX века, а в конце его началась настоящая война между сторон-

никами постоянного и переменного тока. В ней, однако, не было ни победителей, ни побежденных, так как для одних целей оказывается необходимым постоянный ток (например, при

электролизе), в других случаях целесообразнее использовать переменный (особенности, при передаче электроэнергии на большие расстояния). Уместно напомнить, что сейчас существуют простые установки, позволяющие легко преобразовывать один вид тока в другой.

В соответствии с названием, в сетях *постоянного* тока напряжение остается неизменным, а в сетях *переменного* тока оно со временем меняется. Обычно изменение напряжения происходит по синусоидальному закону $U = U_0 \sin \omega t$, где ω – циклическая частота, связанная с периодом T соотношением $\omega = 2\pi/T$, а U_0 – амплитудное значение напряжения. Графически характер изменения напряжения со временем показан на рисунке 1,а.

Предположим, что необходимо рас-

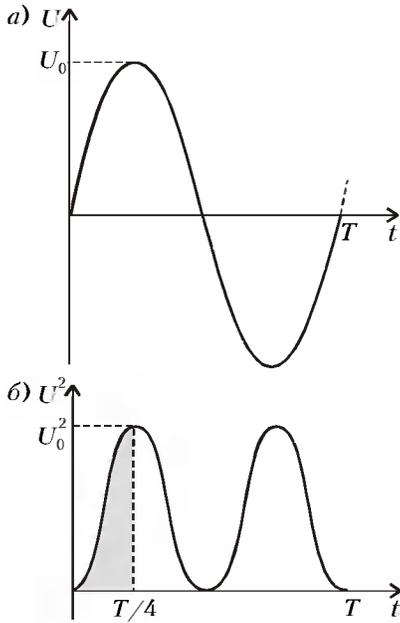


Рис. 1

считать мощность P , которую будет потреблять из сети переменного тока с амплитудным напряжением U_0 электрическая печь, имеющая сопротивление R . Как известно, такие расчеты выполняются с помощью закона Джоуля–Ленца:

$$P = I^2 R,$$

или в нашем случае

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Однако в рассматриваемой цепи напряжение меняется и по знаку, и по величине. Как учесть эти два обстоятельства?

Начнем с ответа на более простой первый вопрос. В законе Джоуля–Ленца фигурирует квадрат напряжения, а поскольку $(+U)^2 = (-U)^2$, тепловыделение не зависит от знака разности потенциалов (или, что то же, от направления тока). Стало быть, и в сети переменного тока электрическая печь будет исправно выполнять свое назначение.

Попробуем теперь ответить на вопрос, какое напряжение надо подставить в формулу закона Джоуля–Ленца, чтобы получить правильное значение мощности в случае переменного тока. Для этого рассчитаем количество теплоты, выделяемое переменным током за время, равное периоду. И сделаем это следующим образом.

Поскольку теплоотдача определяется квадратом напряжения, легко понять, что тепловыделение имеет пери-

од $T/2$ (рис.1,б). Более того, достаточно рассмотреть интервал от 0 до $T/4$, так как выделенная на рисунке фигура, если учесть ее зеркальные отражения, повторяется именно с таким периодом. На этом интервале фаза колебаний меняется от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

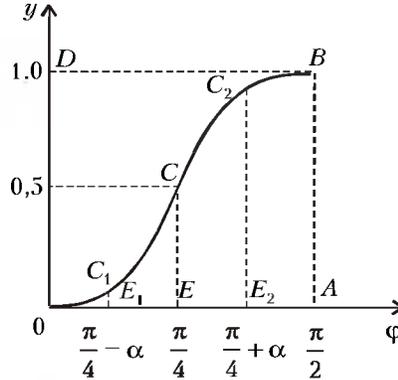


Рис. 2

Запишем выражение для мощности электропечи в некоторый момент времени t :

$$P(t) = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t.$$

Ее среднее значение $\langle P \rangle$ в интервале времени от 0 до $T/4$ представим в виде

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{U_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle.$$

В угловых скобках остался зависящий от времени множитель, обозначаемый далее буквой y . Для расчета его среднего значения воспользуемся рисунком 2, отметив на оси абсцисс точки E_1 , E и E_2 , соответствующие фазам $\pi/4 - \alpha$, $\pi/4$ и $\pi/4 + \alpha$, где α — произвольный угол, удовлетворяющий условию $0 < \alpha < \pi/4$. Ясно, что

$$\begin{aligned} E_1 C_1 &= \sin^2(\pi/4 - \alpha) = \\ &= \cos^2(\pi/2 - (\pi/4 - \alpha)) = \\ &= \cos^2(\pi/4 + \alpha) = 1 - \sin^2(\pi/4 + \alpha) = \\ &= 1 - C_2 E_2. \end{aligned}$$

Таким образом, кривая OC_1CC_2B делит прямоугольник $ODBA$ на две равные части, каждая площадью

$$\frac{A_0 \cdot OD}{2} = \frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Чтобы найти среднее значение $\sin^2 \omega t$ за время изменения фазы от 0 до $\pi/2$,

нужно площадь криволинейной фигуры $OCBA$ разделить на ее основание:

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

После этого находим среднее значение мощности за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$:

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{U_0^2}{2R}.$$

Поскольку такой же результат можно получить для каждого из последующих интервалов длительностью $T/4$, правая часть формулы дает мощность плитки сопротивлением R , включенной в сеть переменного тока с амплитудным значением напряжения U_0 .

Пусть эта же плитка включена в сеть постоянного тока с таким напряжением $U_{\text{эф}}$, что ее мощность осталась прежней. Тогда, приравнявая мощность плитки в сети постоянного тока

$$P = \frac{U_{\text{эф}}^2}{R}$$

правой части предыдущего выражения, после несложного преобразования получим

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Напряжение в сети постоянного тока, где плитка дает такой же тепловой эффект, как и в сети переменного тока с амплитудным значением напряжения, в $\sqrt{2}$ бóльшим, называется эффективным (или действующим) напряжением в сети переменного тока.

В обычной городской сети амплитудное напряжение составляет приблизительно 310 В. Тогда для эффективного напряжения получается хорошо знакомое число 220 В.

Заметим, что аналогичное соотношение связывает эффективное и амплитудное значения и для силы тока в сети переменного тока.

Зачем Галилею песочница

А. СТАСЕНКО

ЖАРА. ПЛЯЖ. ДЕТИ СТРОЯТ ИЗ сырого песка башни и замки. Мальчик меланхолично роняет стальной шарик в горку горячего песка. Спрашивает: «А на какую глубину уйдет шарик, если его уронить с высоты сто метров?». И действительно, стоит подумать, как шарик движется в песке.

Первая стадия падения очевидна: песок при ударе взматывается вверх и в стороны – образуется кратер. А что там, внутри песка, на глубинах, много больших размера шарика?

В какой-то мере песок похож на жидкость. О нем можно сказать, что он струится, течет – ведь есть же, например, песочные часы (в принципе такие же, как и водяные). Но есть и важное отличие: из жидкости не сделаешь горку, а из сухого песка можно насыпать конус (рис.1). (Насыпали,

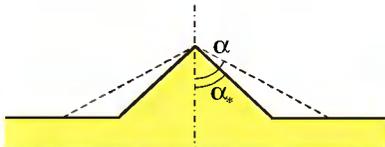


Рис. 1

прикинули на глазок угол при вершине: что-то около $2\alpha_* = 120^\circ$.) Поэтому ясно, что стальной шарик в океане будет монотонно тонуть, а в песке он заведомо остановится на конечной глубине – и этот факт как-то должен быть

связан с величиной предельного угла α_* .

На каждую песчинку массой Δm , лежащую «на поверхности» конуса, действует скатывающая составляющая силы тяжести, равная $\Delta mg \cos \alpha$, причем так, что при $\alpha > \alpha_*$ песчинка «не хочет» скатываться, а при $\alpha < \alpha_*$ конус сам собой осыпается, пока не будет достигнуто условие $\alpha = \alpha_*$. Несомненно, это связано с силами взаимодействия между песчинками. Поэтому, если уж песок и считать жидкостью, то это так называемая *неньютоновская* жидкость. Чем она интересна?

Если обычная вязкая (ньютоновская) жидкость при течении в трубе имеет радиальное распределение скоростей, качественно изображенное на рисунке 2,а, то для неньютоновской жидкости этот профиль скоростей похож на рисунок 2,б, где у стенок трубы имеется неподвижный слой сыпучей среды (см. штриховые линии). И этот слой тем толще, чем больше сила взаимодействия (адгезия) частиц друг с другом и с твердой стенкой. Вот почему так трудно высыпать, например, цемент через трубу – приходится ее трясти, колотить молотком или гаечным ключом. Еще один пример – каждый знает, что нужно делать с солонкой или перечницей, если соответствующий материал не желает высыпаться (все это красиво называется *вибрационной реологией*).

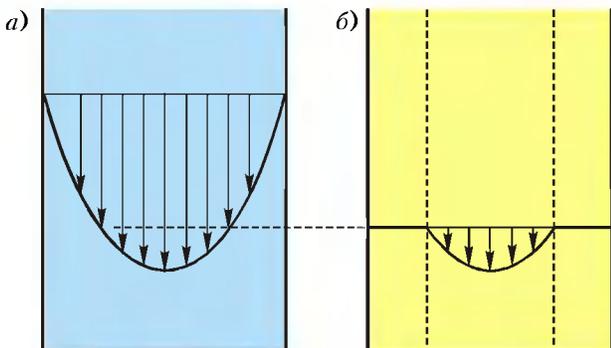


Рис. 2

Итак, с одной стороны, посмотрим на песок как на обычную жидкость. Тогда, если этой «жидкости» приписать среднюю плотность ρ_n (это не плотность материала песка, потому что между песчинками существуют воздушные промежутки), то шарик радиусом r при движении со скоростью v (рис.3) будет испытывать силу сопротивления величиной

$$F_{\text{сопр}} \sim \rho_n v^2 \pi r^2.$$

При перемещении на малое расстояние dy эта сила произведет работу, равную $F_{\text{сопр}} dy$, и, следовательно, изменит кинетическую энергию на величину

$$md \frac{v^2}{2} \sim \pi r^2 \rho_n v^2 dy \quad (1)$$

(ось y и скорость считаем положительными в направлении вниз, силу тяжести шарика mg полагаем много меньшей силы сопротивления). На рисунке 3,а искривленными стрелками условно показаны «линии тока» песчинок в неподвижной системе координат, связанной с землей, а на рисунке 3,б – в системе координат самого шарика, на который песок набегает с той же (по величине) скоростью v (на «бесконечности»). Отметим, что вид линий тока совершенно различен в этих двух системах координат.

Согласно гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости, если эта жидкость натекает на шарик со скоростью v , ее скорость на экваторе будет наибольшей и равной $3v/2$ (из-за сжатия линий тока в экваториальной плоскости). Значит, скорость песка на экваторе шарика в неподвижной системе координат будет равна по величине $v/2$.

Написанное выше дифференциальное соотношение (1) имеет так называемый *релаксационный вид*. Оно типично для многих процессов, в кото-

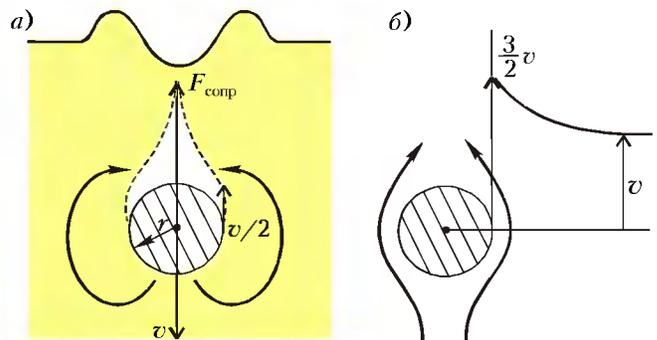


Рис. 3

рых изменение исследуемой величины пропорционально ее текущему значению, например для распада радиоактивных атомов, размножения микробов или роста народонаселения Земли по Мальтусу. Его решение имеет вид

$$\ln \frac{v_0}{v} \sim \frac{\pi r^2 \rho_{\text{п}}}{m} (y - 0) = \frac{y}{l}, \quad (2)$$

где v_0 – начальное значение скорости шарика (при $y = 0$), $l = \frac{m}{\pi r^2 \rho_{\text{п}}}$ – характерная длина. Так, для стального шарика радиусом $r = 1$ см и массой $m = 4\pi r_{\text{ст}}^3 / 3 \approx 30$ г (где $\rho_{\text{ст}} = 7,8$ г/см³ – плотность стали) эта длина имеет порядок

$$l \approx \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ кг}}{\pi \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3} \approx 6,5 \text{ см}$$

(среднеобъемная плотность песков лежит в диапазоне 1,5–1,7 г/см³; мы приняли $\rho_{\text{п}} = 1,6$ г/см³). Это уже определенный намек на глубину проникновения: на этом характерном расстоянии скорость убывает в $e = 2,7$ раза. Но при этом, согласно полученной формуле, шарик нигде не остановится – просто он будет двигаться по мере углубления все медленнее и медленнее. (Конечно, это лишь оценка l по порядку величины: ведь в выражении для силы сопротивления нужно было бы внести еще безразмерный множитель, который называется коэффициентом сопротивления шарика при его движении в песке. Но кто его знает?)

Однако вспомним, что, с другой стороны, песок не совсем жидкость, и этот факт как-то связан с наличием предельного угла α_* . Можно ожидать, что по достижении некоторого значения скорости v_* шарик резко затормозится: в этот момент силы сцепления между песчинками начнут играть преобладающую роль по сравнению ... С чем? Возможно, ответ заключается в сравнении характерной величины касательной составляющей ускорения a_{τ} песчинок на экваторе шарика с величиной ускорения, «скатывающего» песчинки с поверхности песчаной горки. Сделаем оценки. Скорость песка на экваторе возрастает на $\Delta v_{\tau} = \frac{v}{2}$ по сравнению с ее значением в «невозмущенном потоке». Тогда «среднее» приращение скорости будет порядка $\langle \Delta v_{\tau} \rangle = \frac{1}{2} \frac{v}{2}$. И происходит это на «характерном перемещении» порядка радиуса шарика r за харак-

терное время $\langle \Delta t \rangle \sim r / \left(\frac{1}{2} \left(v + \frac{3v}{2} \right) \right)$.
Следовательно, $a_{\tau} = \frac{\langle \Delta v_{\tau} \rangle}{\langle \Delta t \rangle} \sim \frac{5}{16} \frac{v^2}{r}$.

Приравняем это ускорение к предельному значению скатывающего ускорения $g \cos \alpha_*$. Отсюда найдем

$$v^2 \sim \pi r g \cos \alpha_*.$$

Теперь, подставляя эту конечную скорость в выражение (2), для глубины проникновения получим выражение

$$y_* \sim \frac{m}{2\pi r^2 \rho_{\text{п}}} \ln \frac{v_0^2}{\pi r g \cos \alpha_*} \approx \frac{2}{3} \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{п}}} r \ln \frac{2h}{\pi r \cos \alpha_*}. \quad (3)$$

Видно, что y_* растет с увеличением предельного угла α_* . Это понятно: ведь чем больше α_* , тем более среда «сыпучая», а в пределе $\alpha_* \rightarrow \pi/2$ она переходит в жидкость, и тогда стальной шарик может сколько угодно тонуть, например в воде. Но не в ртути – ибо в этом случае нужно учесть и силу Архимеда, которую мы пока что не принимали во внимание (аналогичная ситуация возникнет, если в воду бросить деревянный шарик). Как уже было сказано, если песок потрясти, то его конус будет расплываться, песок все более будет похож на жидкость. В результате в «потрясенном» песке глубина проникновения упавшего шарика должна быть больше. А деревянный шарик или шарик для пинг-понга в сотрясаемом песке будут «всплывать» – это можно проверить в порядке лабораторной работы.

Далее, в выражении (3) мы приняли, что скорость падения шарика с высоты h равна $v_0 = \sqrt{2gh}$, т.е. пренебрегли сопротивлением воздуха – это для того, чтобы поскорее ответить на вопрос, поставленный в самом начале. Конечно, этот результат можно уточнить, учитывая силу сопротивления воздуха. Очевидно, что при этом $v_0^2 < 2gh$. Но полученная формула (3) содержит логарифмическую зависимость от начальной скорости; это настолько слабая зависимость, что физики в шутку называют эту функцию константой. Поэтому такое уточнение несущественно.

Интересно отметить также, что выражение (3) не содержит зависимости от ускорения тяготения. Значит, на Луне глубина проникновения будет та же, что и на Земле: был бы песок одинаков.

Итак, полагая в выражении (3) $h = 100$ м, $\cos \alpha_* = \cos 60^\circ = 1/2$, $r =$

$= 10^{-2}$ м, получим $y_* \sim 0,3$ м. Учитывая множество принятых предположений, осторожный физик сказал бы, что это величина порядка дециметра.

Качественный вид изменения скорости с глубиной приведен на рисунке 4,а – сплошная кривая. Показана «ступенька» при y_* , характерная для сыпучих сред. А штриховая кривая изображает случай деревянного шарика того же радиуса, упавшего в воду с той же начальной скоростью v_0 . Его торможение будет происходить быстрее (так как из выражения (1) следует, что

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{дерева}}} = \frac{10^3}{0,5 \cdot 10^3} = 2 > \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ст}}} \approx \frac{1}{5}),$$

а при y_A движение на мгновение прекратится, и шарик начнет всплывать

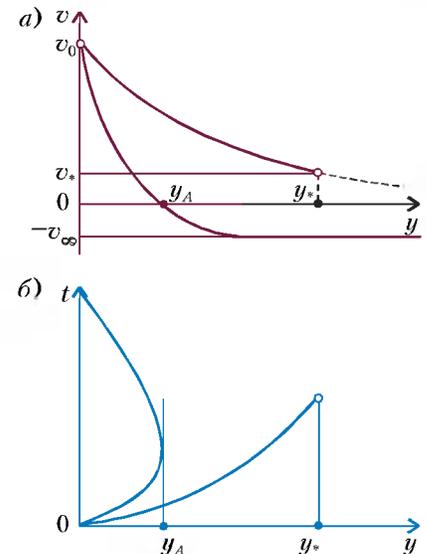


Рис. 4

(скорость изменит знак). Если глубина его проникновения достаточно велика, то на обратном пути вверх будет достигнута постоянная скорость всплывания $-v_{\infty}$, при которой сравниваются силы сопротивления, тяжести и Архимеда.

На рисунке 4,б показан соответствующий вид зависимостей глубины от времени.

Артиллеристы издавна живо интересовались глубиной проникновения в различные среды снарядов разной массы, формы, начальной скорости (в момент удара). В результате они получали эмпирические зависимости, осредненные по различным ситуациям. Эти формулы дают – например, для интересующего нас песка – меньшие значения глубины проникновения, чем полученные нами. И понятно, почему. Ведь мы не учли очень многое. А именно: дополнительные потери энер-

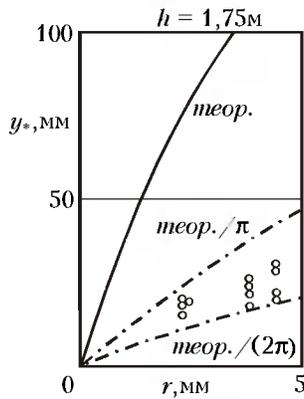


Рис. 5

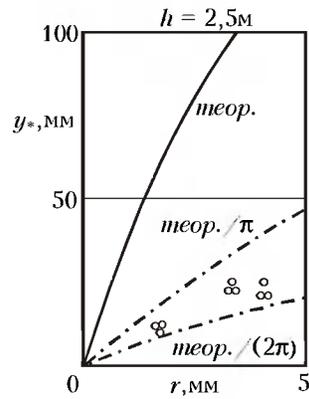
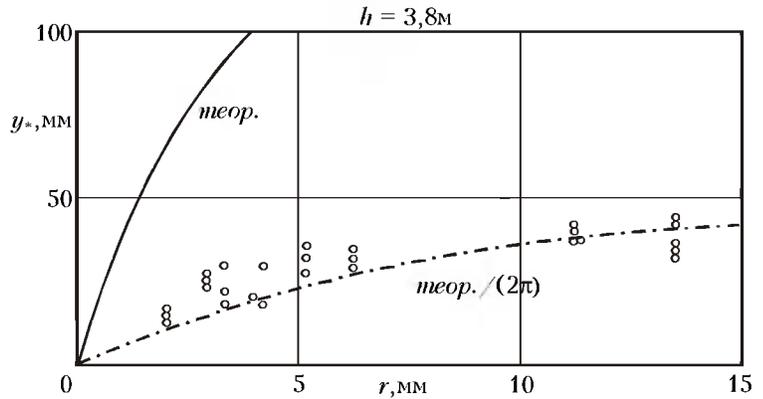


Рис. 6



гии на выброс массы песка (на образование кратеров, так хорошо видных на Луне); силу трения песчинок о шарик (учтена только сила лобового сопротивления); возможную влажность песка (как известно, из мокрого песка хорошие дети делают «куличики» с почти вертикальными поверхностями, а плохие лепят «снежки», чтобы кидаться, — и все это рассыпается при высыхании); возможную «слежалость» песка (на глубинах порядка нескольких метров, которые интересуют артиллеристов, песок может быть уплотненным по сравнению с верхними слоями)... и так далее.

Как известно, знаменитый Галилей любил ронять предметы с Пизанской башни. Стоило ему устроить внизу детскую песочницу — и он многое узнал бы о *механике сыпучих сред* — обширной стране, лежащей между обычной, ньютоновской, жидкостью и твердым телом.

А что же мальчик на пляже? Скорее всего, он через минуту забыл о своем

вопросе. А если нет, то быть ему физиком, а значит, строить модели Мира — упрощать, пренебрегать, ошибаться и уточнять.

Приложение

Любая теория должна проверяться практикой. И автор провел две серии соответствующих экспериментов.

В первой из них, выполненной с одним Студентом, роняли стальные шарики в сахарный песок (дело было на кухне). Разброс результатов получился значительным (рис.5), но теоретическая кривая (сплошная линия) легла заметно выше всех измерений. Оказалось, что по мере проведения опытов сахар становился все «менее сыпучим» (вероятно, из-за влажности воздуха), так что глубина проникновения шарика регулярно уменьшалась со временем. Конечно, можно было бы в качестве сыпучего тела использовать еще гречневую крупу, рис, пшено, растворимый кофе... но это лучше оставить для «Лаборатории «Кванта».

Во второй серии опытов, проведенной в Центральном аэрогидродинамическом ин-

ституте (ЦАГИ), Инженеры и Ученые роняли шарики различной массы с фиксированной высотой в обыкновенный песок (конечно, предварительно просеянный). Эти результаты представлены на рисунке 6.

Научная честность не позволяет сказать вожденные слова «эксперимент блестяще подтвердил теорию»: видно отличие в несколько раз, что естественно для теорий, основанных на приближенных предположениях. Но зато стало ясно, что можно ввести единственный «поправочный коэффициент», в который прячется незнание факторов, не учтенных в теории (или нежелание думать о них далее). Ну конечно, физику приятно разделить теоретические данные не на 3 или 4, а на π или 2π — в этом есть что-то фундаментальное (шарики ведь круглые). На рисунках 5 и 6 штрихпунктирными линиями как раз и показаны результаты такого деления. Можно не сомневаться, что наши читатели придумают что-нибудь получше. Чего им и желаем.

ИНФОРМАЦИЯ

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет (МММФ) — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся на заочное отделение. На трехгодичное обучение принимаются учащиеся, оканчивающие в 2000/01 учебном году восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на четырехгодичное обучение — учащиеся, заканчивающие седьмые классы. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основные цели МММФ — приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в октябре. Занятия начинаются в ноябре. Обучение платное. Для хорошо успевающих уча-

щихся из малообеспеченных семей возможно снижение оплаты. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ. Хорошо успевающие учащиеся одиннадцатых классов приглашаются на олимпиады механико-математического факультета МГУ (иногородним — с предоставлением общежития).

Желающие поступить на заочное отделение МММФ должны *не позднее 20 сентября 2001 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Поступающим в восьмой класс решать задачи 8, 9, 11 не нужно.

Возможно обучение коллективных

учеников (не более 15 человек в одной группе), а также возможно поступление на МММФ учащихся, заканчивающих 9 (10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оценок за 9 (10) класс.

Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

- 1) Республика, край, область
- 2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся)
- 3) Школа, класс (в 2000/01 учебном году)
- 4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения
- 5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность (только для индивидуальных учеников)

Наш адрес: 119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, Малый мехмат.

Для школьников 6–11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ.

Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?
2. После того как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?
3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что треугольник AMD равносторонний. Найдите величину угла AMB .
4. В классе, в котором учится Миша, более 93% учеников – девочки. Какое минимальное число учеников может быть в этом классе?
5. Найдите все пары чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y.$$
6. Можно ли разрезать произвольный треугольник на четыре треугольника, любые два из которых не имеют общих сторон (но, возможно, имеют общие участки сторон)?
7. При каких значениях x выраже-

ние

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$$

принимает наименьшее значение?

8. Найдите три таких последовательных числа a, b, c , чтобы количество корней у уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \\ cx^2 + ax + b = 0$$

было разным.

9. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Докажите, что треугольник равнобедренный.

10. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью. Каждые 15 минут она поворачивает под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

11. Из чисел a и b хотя бы одно иррационально. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a^2 - b, b^2 - a, a + b$ иррационально.

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений – таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Реше-

Фамилия, имя, отчество
Класс ЗФШ
Профессия родителей
Подробный домашний адрес
Номер и адрес школы

Пирогов Юрий Андреевич
10
мать – врач, отец – инженер
120713 Москва, ул. Столетова, д. 3, кв. 13
школа 564, Севастопольский пр., 5а

ние вступительного задания необходимо отослать до 1 октября по адресу: 119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону
(095) 939-54-95

с 14 до 16 часов по рабочим дням.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс нужно решить задачи 1–4, в 11 класс – задачи 1–7.

1. Камень бросают вертикально вверх. Некоторый начальный отрезок пути он пролетает за время t_1 , следующий такой же по величине отрезок пути он пролетает за время t_2 (оба отрезка примыкают друг к другу). На какую максимальную высоту поднимается камень? Ускорение свободного падения g . Спротивлением воздуха пренебречь. В момент $t_1 + t_2$ камень движется вверх.

2. Спутник, движущийся по круговой орбите вблизи поверхности некоторой планеты, совершает один оборот за время T_1 . Если же круговая орбита проходит на высоте h от поверхности планеты, то период обращения спутника равен T_2 . Каково ускорение свободного падения тел вблизи поверх-

ности планеты? Влияние атмосферы не учитывать.

3. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости и движется по горизонтальной плоскости, пройдя до остановки путь s . Какую минимальную работу надо совершить, чтобы вернуть тело в исходную точку по прежней траектории? Плоскость наклонена к горизонту под углом α , коэффициент трения при движении одинаков на всем пути и равен μ .

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. В некотором процессе давление и объем одного моля идеального газа связаны соотношением $p - p_0 = A(V - V_0)$, где постоянные величины A , p_0 , V_0 известны. Чему будет равно давление одного моля газа в этом процессе при температуре T ?

6. Чему равен потенциал изолированного незаряженного металличе-

ского шара радиусом R , если на расстоянии a ($a > R$) от его центра находится точечный заряд q ?

7. Найдите внутреннее сопротивление источника постоянного тока, если известно, что мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, одинакова при двух различных значениях сопротивления: $R_1 = 12,5$ Ом и $R_2 = 2$ Ом.

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 2001/02 учебный год. Главная цель школы – помочь глубже постичь математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в высшие учебные заведения.

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером задачи указывается, для какого класса она предназначена. Например, 4(9, 10) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов. Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу:

190031 Санкт-Петербург, Московский проспект, д.9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс.

В письмо вложите анкету, заполненную печатными буквами по приведенному здесь образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания; решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение об окончании.

Вступительное задание

1(9). Разность

$$\sqrt{40\sqrt{2} - 57} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$$

является целым числом. Найдите это число.

2(9). К чашкам весов подвешены две гири – фарфоровая и железная – равной массы. Нарушится ли равновесие весов, если гири опустить в сосуд с водой? Ответ обоснуйте.

3(9, 10). Из круга вырезали концентрический с ним круг, площадь кото-

Фамилия, имя отчество
Класс (указывается по состоянию на 1 сентября 2001 г.)
Подробный домашний адрес
Номер и адрес школы

СИДОРОВ ИВАН ПЕТРОВИЧ

ДЕСЯТЫЙ

524806 г. ТВЕРЬ, ул. САДОВАЯ, д. 55, кв. 77
ШКОЛА №5, ул. ЗЕЛЕНАЯ, д.7

рого составляет 81% от площади исходного круга. Какой процент от радиуса первоначального круга составляет толщина образовавшегося кольца?

4(9, 10). Лампы и амперметр включены в схему так, как показано на

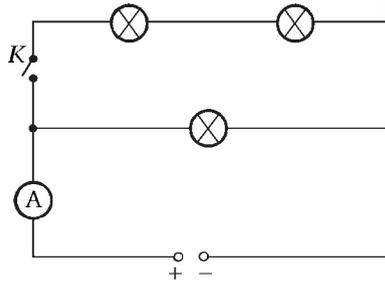


Рис. 1

рисунке 1. Во сколько раз отличаются показания амперметра при разомкнутом ключе K от показаний при замкнутом ключе? Сопротивления ламп одинаковы. Напряжение в цепи поддерживается постоянным.

5(9, 10, 11). Ведро, в котором находится смесь воды со льдом массой 10 кг, внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости

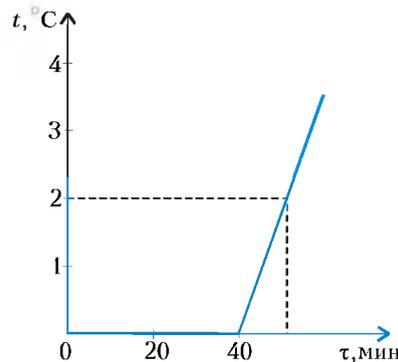


Рис. 2

температуры t от времени τ изображен на рисунке 2. Какова масса льда, находящегося в ведре? Теплоемкостью ведра пренебречь. Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(моль · К), удельная теплота плавления льда 0,33 МДж/кг.

6(10, 11). Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

7(10, 11). Какой угол наклона должна иметь крыша, чтобы вода стекала с нее за минимальное время? Ширина крыши $2b$.

8(11). Найдите среднее арифметическое наименьшего целого и наибольшего целого решений неравенства

$$(x + 3)\sqrt{12 - |x|} \geq 0.$$

9(11). В сосуде находится 16 г кислорода и 10 г водорода. Во сколько раз изменится давление в сосуде, когда весь кислород соединится с необходимой для реакции частью водорода? Температура в сосуде поддерживается постоянной. Давлением насыщенных водяных паров пренебречь.

10(9, 10, 11). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , равна одному метру. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

Самый произвольный треугольник

И. АКУЛИЧ

Он был настолько типичен, что этим выделялся.

НЕРЕДКО ВСТРЕЧАЮТСЯ ЗАДАЧИ, в которых фигурирует некий произвольный треугольник (возможны варианты: произвольный остроугольный, произвольный тупоугольный, произвольный равнобедренный, произвольный прямоугольный и т.п.). Чертеж к условию чаще всего не прилагается. И тогда перед вдумчивым школьником встает проблема: как нарисовать *произвольный* треугольник? (Не слишком вдумчивый не станет ломать голову – нарисует что-нибудь и будет вполне доволен результатом: чего вы, дескать, хотели – сказано «произвольный», вот я и нарисовал произвольный; а что на чертеже ничего не разберешь – досадная случайность!)

Для лучшего осмысления вопроса начнем с довольно простого случая прямоугольного треугольника. Вряд ли у кого язык повернется назвать произвольным равнобедренный пря-

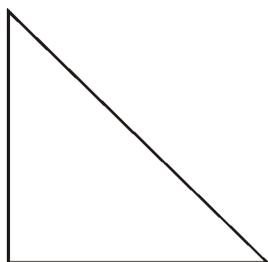


Рис. 1

моугольный треугольник (рис. 1). Да и у треугольника, изображенного на рисунке 2, гипотенуза вследствие малости одного из катетов весьма близка к другому катету, так что треугольник ... тоже почти равнобедренный!



Рис. 2

Наверное, теперь стало немного яснее, чего мы хотим: треугольник должен быть не слишком «экстремальным», а «средним», «типичным», удобным для работы.

Как известно, у треугольника три стороны и три угла. Что касается сторон, то их длины ограничены размерами листа бумаги. И хотя полезно рисовать большие чертежи (попытка экономить бумагу приведет лишь к тому, что задачу с первого раза не решишь и придется сделать не один-два, а много чертежей), но форма треугольника определяется, несомненно, величинами углов. Что сие означает в случае прямоугольного треугольника? Давайте разбираться.

Прямоугольный треугольник

Обозначим величины острых углов прямоугольного треугольника буквами α и β . Разумеется, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Можно считать, что $\alpha \leq \beta$. Чтобы треугольник был как можно меньше похож на равнобедренный, потребуем, чтобы величины его углов как можно сильнее отличались друг от друга. Это означает, что α должно как можно сильнее отличаться от β , а β – от 90° . Иначе говоря, мы хотим найти такие α и β , чтобы разности $\beta - \alpha$ и $90^\circ - \beta$ были побольше. (Интересно, а мы ничего не забыли? Неравнобедренный – это хорошо, а вдруг треугольник будет такой «худой», как на рисунке 2? Может быть, нужно было еще попросить, чтобы угол α не был слишком маленьким? Нет, $\alpha = 90^\circ - \beta$, так что ничего нового это условие не дало бы.)

Но задача все еще не получила точной формулировки. Как можно одновременно следить за двумя величинами? Что лучше: $\alpha = 11^\circ$ и $\beta = 79^\circ$,

когда $\beta - \alpha = 68^\circ$ и $90^\circ - \beta = 11^\circ$, или $\alpha = 28^\circ$ и $\beta = 62^\circ$, когда эти разности равны 34° и 28° ?

Чтобы не запутаться в бесплодных спорах, давайте вместо двух величин $\beta - \alpha$ и $90^\circ - \beta$ будем следить за одной – за *минимальной* из них, т.е. за величиной $\min(\beta - \alpha, 90^\circ - \beta)$. (А почему не за их произведением, не за суммой квадратов или не за суммой двадцатых степеней? Потерпите немного – к концу статьи и сумму квадратов к делу приспособим. А вот до двадцатых степеней очередь не дойдет.) Это значит, что мы будем искать такие α и β , для которых максимально велика величина $\min(\beta - \alpha, 90^\circ - \beta)$. (При этом, не забывайте, $0^\circ < \alpha \leq \beta$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$.)

Поскольку $\alpha = 90^\circ - \beta$ и $\beta - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$, то задачу можно переформулировать следующим образом: найти такое $\alpha \in (0^\circ; 45^\circ]$, для которого величина $\min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha)$ – наибольшая возможная.

Проще всего решить эту задачу графически: на рисунке 3 изображены графики функций $y = x$ и $y = 90 - 2x$, а красным цветом – график $y = \min(x, 90 - 2x)$. Очевидно, макси-

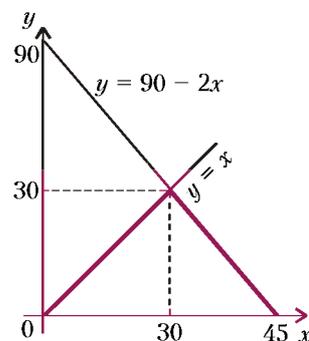


Рис. 3

мум последней функции достигается в точке $x = 30$.

Впрочем, можно было обойтись и без графиков. При $0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$ имеем

$$\min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha) \leq \alpha \leq 30^\circ,$$

а при $30^\circ < \alpha \leq 45^\circ$ имеем

$$\min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha) \leq 90^\circ - 2\alpha < 30^\circ.$$

Следовательно,

$$\max_{0^\circ < \alpha \leq 45^\circ} \min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha) = 30^\circ,$$

причем максимум достигается при $\alpha = 30^\circ$.

Итак, самый произвольный прямоугольный треугольник – это треуголь-

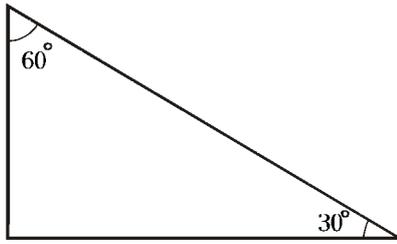


Рис. 4

ник с углами 30° , 60° и 90° (рис. 4). Так сказать, он не низок, не высок, он не узок, не широк. Гармония! Наверное, примерно такого результата вы ждали, но одно дело – предчувствовать, а другое дело – владеть точным доказательством.

Равнобедренный треугольник

Задачу поиска самого произвольного равнобедренного треугольника я разобью на три разные задачи: найти самый произвольный

- 1) тупоугольный равнобедренный треугольник;
- 2) равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании;
- 3) остроугольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого больше угла при основании.

Рассмотрим их по очереди.

Равнобедренный тупоугольный треугольник. Пусть α – угол при основании, $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ – угол при вершине, причем $\beta > 90^\circ$. Тогда $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Если мы хотим, чтобы углы α и β треугольника как можно сильнее отличались друг от друга, то должны выбрать $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ]$ так, чтобы величина $\beta - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$ была бы максимальной.

Мы столкнулись с неприятностью: чем меньше α , тем больше $180^\circ - 3\alpha$, но выбрать $\alpha = 0^\circ$ нельзя: сколь угодно малым α может быть, а нулем – не может!

Что же получается? Самый-самый красивый тупоугольный равнобедренный треугольник не существует, и мы можем лишь приблизительно нарисовать его, взяв $\alpha \approx 0^\circ$? Да нет, что-то не то. Скорее всего, мы решили не ту задачу. Наверное, не надо позволять углу α быть слишком маленьким. (Можно было бы еще потребовать, чтобы β не слишком приближалось к 180° , но это получится само собой, поскольку $180^\circ - \beta = 2\alpha$.) Итак, попробуем найти $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$, при котором наименьшая из величин α и $180^\circ - 3\alpha$ была бы как можно больше.

Поскольку при $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ верно

неравенство

$$\alpha < 180^\circ - 3\alpha,$$

то при рассматриваемых α имеем

$$\min(\alpha, 180^\circ - 3\alpha) = \alpha,$$

и ответа на поставленный нами вопрос, строго говоря, опять нет: можно брать α сколь угодно близким к 45° ,

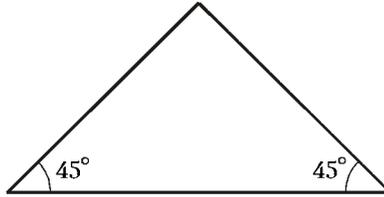


Рис. 5

но в точности 45° – нельзя, треугольник получается прямоугольным (рис. 5).

Не знаю как вам, а мне это не нравится: в глубине души хотелось, чтобы треугольник отличался от прямоугольного. Поставлю новую задачу: найти такое $\alpha \in (0^\circ, 45^\circ)$, чтобы наименьшая из величин α и $\beta - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$ была как можно больше. Формулой это записывается так:

$$\max_{0^\circ < \alpha < 45^\circ} \min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha).$$

Эту задачу мы уже решали – как помните, максимум достигается при $\alpha = 30^\circ$. При этом $\beta = 120^\circ$. Треуголь-



Рис. 6

ник с такими углами изображен на рисунке 6.

Итак, задаче о самом произвольном равнобедренном тупоугольном треугольнике мы дали три разные математически точные формулировки. В двух из них определенного ответа нет ($\alpha \approx 0^\circ$, $\beta \approx 180^\circ$ или $\alpha \approx 45^\circ$, $\beta \approx 90^\circ$), а в третьей $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Является ли последний ответ единственно правильным? Нет: вполне возможна ситуация, в которой вас будут интересовать совсем другие величины, и тогда задачу о самом произвольном равнобедренном тупоугольном треугольнике придется решать заново!

Угол при вершине меньше угла при основании. Пусть по-прежнему α – угол при основании, β – угол при вершине, причем $\alpha > \beta$. Поскольку

$$90^\circ - \frac{\beta}{2} = \alpha > \beta,$$

то $90^\circ > \frac{3}{2}\beta$, откуда $\beta < 60^\circ$. Если интересоваться величиной

$$\begin{aligned} \max_{0^\circ < \beta < 60^\circ} \min(\beta, \alpha - \beta) = \\ \alpha = (180^\circ - \beta)/2 \\ = \max_{0^\circ < \beta < 60^\circ} \min\left(\beta, 90^\circ - \frac{3}{2}\beta\right), \end{aligned}$$

то ответ легко найти, построив сначала графики $y = x$ и $y = 90 - \frac{3}{2}x$ (рис. 7), затем (красным цветом)

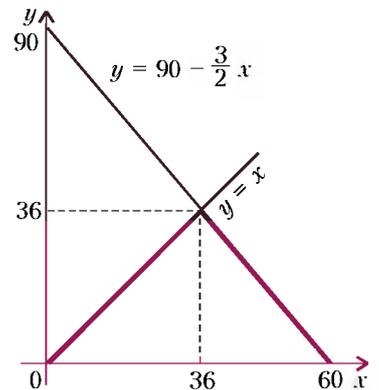


Рис. 7

$y = \min\left(x, 90 - \frac{3}{2}x\right)$. Максимум достигается при $x = 36$. Значит, самый произвольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании, – это треугольник с углами 72° , 72° и 36° (рис. 8).

Но все не так просто. Если мы рассмотрим

$$\max_{0^\circ < \beta < 60^\circ} \min(\beta, \alpha - \beta, 90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta), \\ \alpha = (180^\circ - \beta)/2$$

то, построив графики $y = x$, $y = 90 - \frac{3}{2}x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 90 - x$

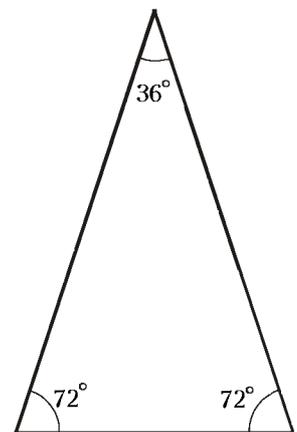


Рис. 8

и, наконец, график $y = \min\left(x, 90 - \frac{3}{2}x, \frac{x}{2}, 90 - x\right)$, увидим, что максимум достигается при $x = 45$. Получается, что самый произвольный непрямоугольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании, — это треугольник с углами $67,5^\circ$, $67,5^\circ$ и 45° (рис.9).

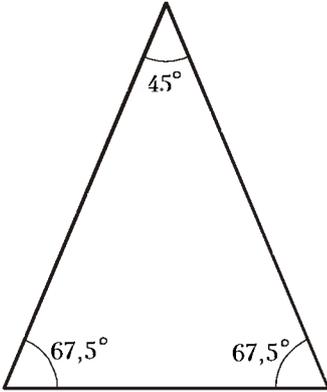


Рис. 9

Какой из треугольников, изображенных на рисунках 8 и 9, милее вашему сердцу? Мне чуть больше нравится второй, поскольку он сильнее отличается от прямоугольного. Впрочем, возможны какие-то другие постановки интересовавшей нас в этом разделе задачи, так что не буду навязывать вам этот треугольник, а еще раз скажу: в конечном счете все зависит от выбранного критерия!

Угол при вершине больше угла при основании. Напомню, что здесь мы ищем «самый произвольный» остроугольный равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине больше угла при основании, т.е. $90^\circ > 180^\circ - 2\alpha > \alpha$, или $45^\circ < \alpha < 60^\circ$. Если рассмотреть

$$\max_{\substack{45^\circ < \alpha < 60^\circ \\ \beta = 180^\circ - 2\alpha}} (\beta - \alpha),$$

то ничего интересного не увидим — максимум не достигается, поскольку точка $\alpha = 45^\circ$ не входит в рассматриваемый интервал. А вот если рассмотреть

$$\max_{\substack{45^\circ < \beta < 60^\circ \\ \alpha = (180^\circ - \beta)/2}} \min(\beta, \beta - \alpha, 90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta),$$

то получим ответ: максимум достигается при $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 72^\circ$ (рис.10). (Проверьте!)

Неравнобедренный треугольник

Обозначим величины углов буквами α , β , γ . Пусть для определенности

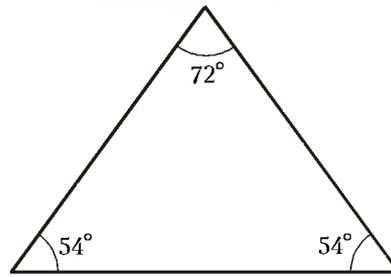


Рис. 10

$0^\circ < \alpha \leq \beta \leq \gamma < 180^\circ$. Рассмотрим сначала задачу о том, насколько большой может быть величина $\min(\beta - \alpha, \gamma - \beta)$. Очевидно, если уменьшать α , одновременно увеличивая γ и не меняя β , то обе разности $\beta - \alpha$ и $\gamma - \beta$ будут увеличиваться. Поэтому достаточно рассмотреть два крайних случая: $\alpha = 0^\circ$ и $\gamma = 180^\circ$. (Конечно, ни треугольника с нулевым углом, ни треугольника с развернутым углом не существует. Но ничего не поделаешь — уж если выбрали функцию $\min(\beta - \alpha, \gamma - \beta)$, то надо анализировать эти два крайних случая.)

Второй случай ничего хорошего нам не сулит: поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то $\gamma = 180^\circ$ лишь при $\alpha = \beta = 0^\circ$.

А в первом случае ($\alpha = 0^\circ$) условие $\beta + \gamma = 180^\circ$ сводит задачу к нахождению максимума выражения $\min(\beta, 180^\circ - 2\beta)$, где $0^\circ < \beta \leq 90^\circ$. Очевидно, максимум достигается при $\beta = 60^\circ$, так что на роль самого неравнобедренного треугольника претендует треугольник с углами $\alpha \approx 0^\circ$, $\beta \approx 60^\circ$ и $\gamma \approx 120^\circ$ (рис.11).



Рис. 11

Ответ получен? Нет, есть еще несколько претендентов! Давайте потребуем, чтобы угол α не был слишком маленьким, точнее говоря, вместо $\min(\beta - \alpha, \gamma - \beta)$ постараемся сделать как можно большей величину

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, \gamma - \beta).$$

Чтобы избавиться от третьей переменной, заменим γ на $180^\circ - \alpha - \beta$. Очевидно,

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta),$$

условие $\beta \leq \gamma$ примет вид $\alpha + 2\beta \leq 180^\circ$. На координатной плоскости множество точек $(\alpha; \beta)$, удовлетворяющих последнему неравенству и неравенствам $0 < \alpha \leq \beta$, изображается в виде треугольника OKL (рис.12).

Чтобы исследовать величину Δ , сначала выясним, для каких точек $(\alpha; \beta)$

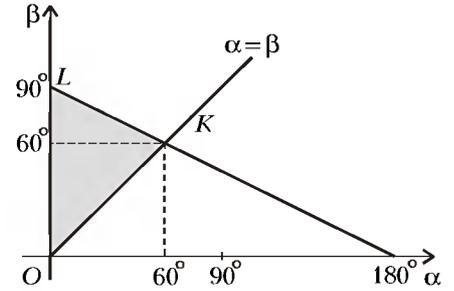


Рис. 12

какое из чисел α , $\beta - \alpha$, $180^\circ - \alpha - 2\beta$ минимально. Для этого воспользуемся чем-то вроде «метода интервалов» — посмотрим, где эти величины равны, т.е. нарисуем прямые, заданные уравнениями $\alpha = \beta - \alpha$, $\beta - \alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ и $\alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ (рис. 13).

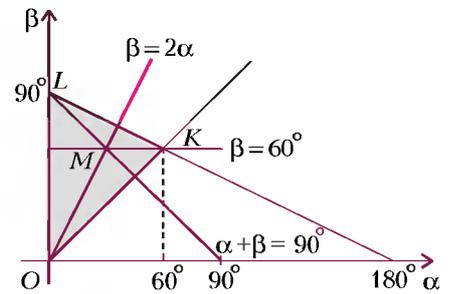


Рис. 13

Они делят треугольник OKL на треугольники OLM , OMK и KLM . Как нетрудно сообразить (проанализировав неравенства или произвольно выбрав в каждом из этих треугольников по точке), в треугольнике OLM из интересующих нас трех чисел α , $\beta - \alpha$, $180^\circ - \alpha - 2\beta$ самым маленьким является α . В треугольнике OMK таковым является $\beta - \alpha$, а в KLM , разумеется, это $180^\circ - \alpha - 2\beta$.

Теперь легко понять, что максимальное значение Δ принимает в точке $M(30^\circ; 60^\circ)$. На роль «самого неравнобедренного» треугольника претендует (как помните, тоже самый произвольный) прямоугольный треугольник! Хорошо ли это? В некоторых случаях, наверное, хорошо. Но чаще всего — плохо! Поэтому постараемся, чтобы треугольник не был прямоугольным.

Неравнобедренный непрямоугольный треугольник. Поскольку α всегда не превосходит 60° и, тем самым, не менее чем на 30° отличается от 90° , то за «непрямоугольность» отвечают величины $90^\circ - \beta$ и $|90^\circ - \gamma| = |\alpha + \beta - 90^\circ|$. Значит, нам нужно максимизировать величину

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta, 90^\circ - \beta, |\alpha + \beta - 90^\circ|),$$

где по-прежнему $0^\circ < \alpha \leq \beta \leq 180^\circ - \alpha - \beta$. Работы у нас явно прибавилось: если применять метод разбиения на области, который только что успешно сработал при поиске самого неравностороннего треугольника, то одних только условий $\alpha = \beta - \alpha$, $\alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, ..., $90^\circ - \beta = |\alpha + \beta - 90^\circ|$ получается десять штук, к тому же все время мешается модуль!

Впрочем, от модуля избавиться легко: мы можем отдельно исследовать остроугольные и тупоугольные треугольники.

Неравносторонний остроугольный треугольник. А вместо пяти величин можно рассмотреть всего лишь три! В самом деле, $\alpha > \alpha + \beta - 90^\circ$ и $90^\circ - \beta > \alpha + \beta - 90^\circ$ (докажите!). Поэтому

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta, 90^\circ - \beta, \alpha + \beta - 90^\circ) = \min(\beta - \alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta, \alpha + \beta - 90^\circ).$$

На рисунке 14 изображен треугольник KLN , заданный неравенствами

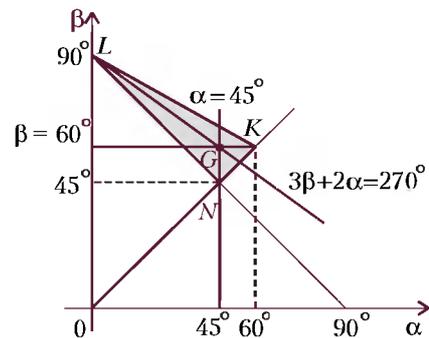


Рис. 14

$0^\circ < \alpha \leq \beta < 90^\circ$ и $\alpha + \beta > 90^\circ$. Прямые, заданные уравнениями $\beta - \alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, $180^\circ - \alpha - 2\beta = \alpha + \beta - 90^\circ$ и $\beta - \alpha = \alpha + \beta - 90^\circ$, разбивают треугольник KLN на треугольники KLG , KNG и LNG . Максимального значения величина Δ достигает в точке $G(45^\circ; 60^\circ)$ (убедитесь в этом!). Мы

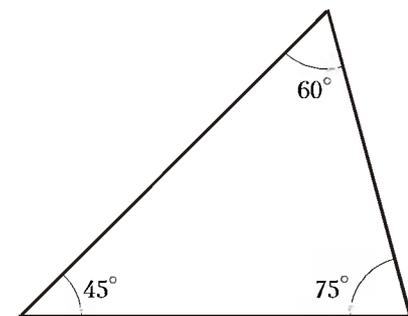


Рис. 15

нашли углы самого-самого неравностороннего остроугольного треугольника: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$ (рис. 15).

Неравносторонний тупоугольный треугольник. В этом случае

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta, 90^\circ - \beta, 90^\circ - \alpha - \beta).$$

Поскольку $180^\circ - \alpha - 2\beta > 90^\circ - \alpha - \beta$ и $90^\circ - \beta > \alpha$, то опять достаточно рассматривать три величины:

$$\Delta = \min(\alpha, \beta - \alpha, 90^\circ - \alpha - \beta).$$

Дальше все, как обычно. На рисунке 16 изображен треугольник OLN , заданный неравенствами $0^\circ < \alpha \leq \beta$ и

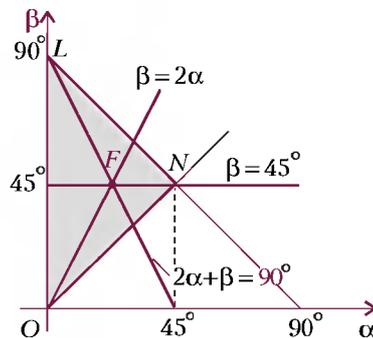


Рис. 16

$\alpha + \beta < 90^\circ$. Прямые, заданные уравнениями $\alpha = \beta - \alpha$, $\beta - \alpha = 90^\circ - \alpha - \beta$ и $\alpha = 90^\circ - \alpha - \beta$, разбивают его на треугольники OLF , ONF и LNF . Максимального значения величина Δ достигает в точке $F(22,5^\circ; 45^\circ)$, так что мы опять нашли углы самого-самого неравностороннего тупоугольного треугольника: $\alpha = 22,5^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 112,5^\circ$ (рис. 17).

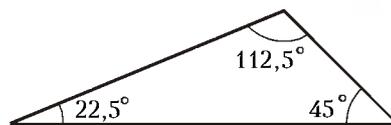


Рис. 17

Таблица наименее произвольных треугольников

Подведем итог нашего упорного (и, чего греха таить, малость скучноватого) труда:

Прямоугольный	Равносторонний		Неравносторонний		
	остроугольный	тупоугольный	остроугольный	тупоугольный	
30°	67,5°	54°	30°	45°	22,5°
60°	67,5°	54°	30°	60°	45°
90°	45°	72°	120°	75°	112,5°

А на практике?

Есть старая парламентская шутка: «Закон мы уже приняли, пора выяснить, можно ли его исполнить». К чему эти слова? К тому, что вдумчивый школьник, о котором шла речь в начале статьи, может спросить: «Если на уроке надо будет изобразить произвольный треугольник, то все остальные быстро и бездумно нарисуют его, а я буду транспортиром углы вымерять? Или циркуль схвачу? Засмеют!»

Возражение резонное – найденные нами треугольники должны быть еще и удобными для рисования в школьной тетради (без транспортира и циркуля!). Внезапно нас осеняет: в применяемых на уроках математики тетрадях имеется сетка со стороной 5 мм. Осталось подобрать нужные узлы этой сетки, соединить их – и ни транспортир, ни циркуль не потребовались!

Но воодушевление рискует смениться унынием: далеко не каждый угол можно построить, соединив узлы сетки. Впрочем, нужна ли нам абсолютная точность? Нет, не нужна!

Задача, таким образом, сменилась на поиск наилучших приближений некоторых иррациональных чисел рациональными. И здесь на помощь приходят (не входящие в обязательную школьную программу, но вовсе не бесцельные) цепные дроби.

Цепная дробь – это выражение вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

где a_1, a_2, a_3, \dots – натуральные числа, а a_0 – целое число. Можно доказать, что любое рациональное число представляется в виде конечной цепной дроби, например

$$\frac{19}{17} = 1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}$$

а любое иррациональное число единственным образом разлагается в бес-

конечную цепную дробь, например

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}} = \dots \\ &\dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}} \end{aligned}$$

Можно доказать, что если «оборвать» цепную дробь в том или ином месте, то получим наилучшее приближение соответствующего числа. (Наилучшее – в некотором точном смысле, который я не буду здесь объяснять, надеюсь, что это послужит поводом для серьезного знакомства с цепными дробями – например, по книжке А.Я.Хинчина «Цепные дроби»¹.)

Начнем с наипроизвольнейшего прямоугольного треугольника. Его острые углы, помнится, 30° и 60°, поэтому отношение катетов равно

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = \\ &= 1 + \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)/2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)/2}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}} \end{aligned}$$

«Обрывая» эту дробь в разных местах, получаем все более точные приближения числа $\sqrt{3}$ обыкновенными

дробями:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1} &= 2, \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} &= \frac{5}{3}, \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} &= \frac{7}{4}, \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} &= \frac{19}{11} \end{aligned}$$

(далее не выписываю, поскольку числитель и знаменатель получаются слишком большие для тетрадной страницы). Поэтому имеет смысл строить прямоугольный треугольник с катетами 19 и 11 клеток. Неплох и треугольник с катетами 7 и 4 (а также подобные ему – 14 и 8 или 21 и 12), отличие углов от 30° и 60° всего лишь около 1°.

Лично мне из вышеперечисленных больше всего нравится треугольник с катетами 14 и 8 – он не слишком велик, и его стороны легко поделить пополам (например, если потребуются провести медиану). Впрочем, это зависит от конкретной решаемой задачи.

Следующий в таблице – треугольник с углами 67,5°, 67,5° и 45°. Поскольку

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 22,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5^\circ},$$

то, решив квадратное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 22,5^\circ + 2\operatorname{tg} 22,5^\circ - 1 = 0,$$

находим

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1,$$

так что

$$\operatorname{tg} 67,5^\circ = \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Число $\sqrt{2}$ мы уже разложили в цепную дробь. Поэтому для числа $\operatorname{tg} 67,5^\circ$ сразу выписываю подходящие дроби:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{2} &= \frac{5}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{12}{5}, \\ 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} &= \frac{29}{12}, \dots \end{aligned}$$

Последнее приближение едва уместится на тетрадной странице, а предпоследнее дает нам равнобедренный

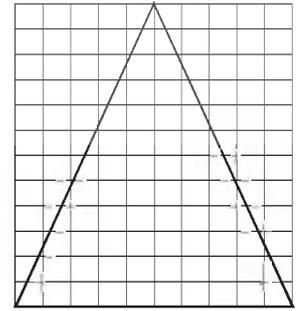


Рис. 18

треугольник с высотой 12 клеток и основанием $2 \cdot 5 = 10$ клеток (рис. 18). При необходимости размеры можно увеличить вдвое.

Следующий треугольник – равнобедренный с углом при основании 54°. Тангенс этого угла в явном виде вычислить сложнее, чем $\operatorname{tg} 60^\circ$. Но можно бесцелостно вычислить его на калькуляторе и затем разложить в цепную дробь:

$$\operatorname{tg} 54^\circ = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Обратите внимание – эта цепная дробь как будто сама указывает, где ее лучше оборвать:

$$\operatorname{tg} 54^\circ \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}}}$$

Соответствующий равнобедренный треугольник имеет высоту 11 клеток и

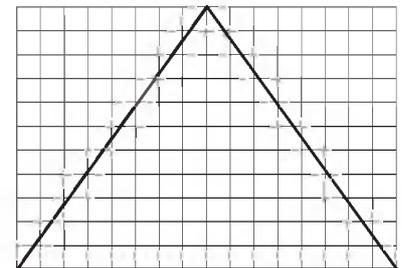


Рис. 19

основание $2 \cdot 8 = 16$ клеток (рис. 19).

Следующий треугольник – равнобедренный с углом при основании 30°. С ним нет проблем, ибо он состоит из двух уже «обсчитанных» нами прямоугольных треугольников с углами 30° и 60°, сложенных меньшими катетами. В результате получается равнобедренный треугольник с высотой 4 клетки и основанием $2 \cdot 7 = 14$ клеток (рис. 20).

¹ См. также статьи Д.Фукса, М.Фукса «О наилучших приближениях» («Квант» №11 за 1971 г.) и Ю.Нестеренко, Е.Никишина «Очерк о цепных дробях» («Квант» №5, 6 за 1983 г.). (Прим. ред.)



Рис. 20

Можно, конечно, и удвоить, а то уж очень низенький получился.

Остроугольный неравносторонний треугольник с углами 45° , 60° и 75° можно «склеить» из двух прямоугольных треугольников, углы одного из которых равны 45° и 45° , а второго – 60° и 30° . С первым проблем нет, а второй мы уже строили. Значит, ответ готов: треугольник с высотой 7 клеток и основанием $7+4=11$ клеток (рис. 21), или вдвое больший.



Рис. 21

Наконец, произвольнейший тупоугольный неравносторонний треугольник (с углами $22,5^\circ$, 45° и $112,5^\circ$) можно «склеить» из двух прямоугольных треугольников, один из которых – равнобедренный прямоугольный, а второй имеет углы $22,5^\circ$ и $67,5^\circ$. Тангенс угла $67,5^\circ$ мы уже раскладывали

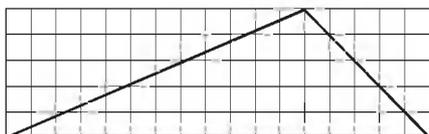


Рис. 22

в цепную дробь. Приближение $\operatorname{tg} 67,5^\circ \approx \frac{12}{5}$ дает треугольник с высотой 5 клеток и основанием $12+5=17$ клеток (рис. 22).

Еще несколько произвольнейших треугольников

При поиске произвольнейшего прямоугольного треугольника мы рассматривали величину $\min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha)$. Но вместо нее можно было рассмотреть сумму квадратов

$$\alpha^2 + (90^\circ - 2\alpha)^2.$$

Квадратный трехчлен

$$5\alpha^2 - 360^\circ\alpha + 8100^\circ$$

(уж простите меня за дважды нарисованный кружочек у 8100 – почему-то

нет общепринятого обозначения для квадратных градусов; для квадратных метров обозначение есть, а для квадратных градусов – нет!) принимает свое наименьшее значение при $\alpha = \frac{360^\circ}{2 \cdot 5} = 36^\circ$. Вот вам и еще один самый произвольный прямоугольный треугольник! (Восторгов поубавится, когда вы вспомните, что величину $\min(\alpha, 90^\circ - 2\alpha)$ мы старались сделать максимально большой – а для суммы квадратов $\alpha^2 + (90^\circ - 2\alpha)^2$ почему-то искали вовсе не наибольшее, а наименьшее значение!)

Аналогично, при поиске произвольнейшего равнобедренного треугольника можно было рассмотреть сумму квадратов

$$(\beta - \alpha)^2 + \alpha^2 = (180^\circ - 3\alpha)^2 + \alpha^2.$$

Квадратный трехчлен

$$10\alpha^2 - 6 \cdot 180^\circ\alpha + 32400^\circ$$

принимает наименьшее значение при

$$\alpha = \frac{6 \cdot 180^\circ}{2 \cdot 10} = 54^\circ.$$

Помните, был такой треугольник?

Когда эта статья готовилась к печати, в редакции мне показали письмо В.Б.Дроздова (Рязань). Он предложил свой критерий. Но лучше не буду пересказывать его письмо, а приведу длинную цитату: «Этот сюжет возник у меня при подготовке рисунка к одной моей статье. Один раз нарисованный мною произвольный треугольник произвольно оказался почти что равнобедренным, другой раз – весьма близким к прямоугольному.

Поскольку форма треугольника определяется его углами α и β (третий угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$), то найдем углы треугольника, который максимально отличается от двух названных частных случаев, а также от вырожденного варианта – отрезка. Не умаляя общности, считаем $\alpha < \beta < \gamma$. Начну с остроугольного треугольника. Конечно, мой критерий вряд ли может претендовать на единственность, но он будет достаточно разумен: я введу функцию углов

$$\begin{aligned} F &= \alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(90 - \gamma) = \\ &= \alpha(\beta - \alpha)(180 - \alpha - 2\beta)(\alpha + \beta - 90) \end{aligned}$$

и буду искать такой треугольник, для которого F принимает наибольшее значение».

Затем автор письма объясняет, что функция F интересует его не при лю-

бых α и β , а только при тех, которые изображаются точками треугольника KLN (см. рис. 14). Далее он пишет: «Определить наибольшее значение функции двух переменных можно по аналогии с функцией одной переменной. В самом деле, мысленно зафиксируем β . Тогда функция F станет функцией одной переменной α . Находим ее производную (такую производную называют частной производной от функции $F(\alpha, \beta)$ по α) и приравниваем к нулю. Затем делаем то же самое, фиксируя α и дифференцируя по β . Произведение четырех множителей удобно дифференцировать по формуле

$$\begin{aligned} (u_1 u_2 u_3 u_4)' &= \\ &= u_1 u_2 u_3 u_4 \cdot \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_3'}{u_3} + \frac{u_4'}{u_4} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{180 - \alpha - 2\beta} + \frac{1}{\alpha + \beta - 90} \right) = 0, \\ F(\alpha, \beta) \cdot \left(\frac{0}{\alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{2}{180 - \alpha - 2\beta} + \frac{1}{\alpha + \beta - 90} \right) = 0, \end{cases}$$

которая сводится к системе двух уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha\beta - 270\alpha + 90\beta = 0, \\ 3\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta - 225\alpha + 90\beta = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $\beta = \alpha + 22,5$. Подставив в первое уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$4\alpha^2 - 210\alpha + 2025 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{105 \pm 15\sqrt{13}}{4}.$$

Подходит лишь корень, соответствующий знаку плюс, ибо другой корень вместе со значением $\beta = \alpha + 22,5^\circ$ дает точку, лежащую вне треугольника KLN . Приближенные значения искомым углов таковы: $\alpha \approx 39,77^\circ$; $\beta \approx 62,27^\circ$; $\gamma \approx 77,96^\circ$.

Для тупоугольного треугольника решение в общем похоже на вышеизложенное, поэтому укажу только ключевые моменты. Функция

$$F = \alpha(\beta - \alpha)(90 - \beta)(\gamma - 90)$$

имеет область определения треугольник OLN (см. рис.16). Приравнивая частные производные к нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{90 - \alpha - \beta} = 0, \\ \frac{1}{\beta - \alpha} - \frac{1}{90 - \beta} - \frac{1}{90 - \alpha - \beta} = 0, \end{cases}$$

которую легко привести к виду

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta + 270\alpha - 90\beta = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta - 360\alpha - 180\beta + 8100 = 0, \end{cases}$$

откуда $\beta = (315\alpha - 4050)/(4\alpha - 45)$, а далее из уравнения

$$8\alpha^2 - 540\alpha + 6075 = 0$$

находим

$$\alpha = \frac{135 - 45\sqrt{3}}{4} \approx 14,26^\circ,$$

$$\beta = \frac{45(5 - \sqrt{3})}{4} \approx 36,76^\circ,$$

$$\gamma = \frac{45(4 + \sqrt{3})}{2} \approx 128,97^\circ.$$

Вот я и нашел два наиболее произвольных (точнее, максимизирующих выбранные мной функции) треугольника».

Заключение

Можно ввести еще очень много других критериев напроизвольности – и разумных, и вздорных. Нужно ли этим заниматься в этой статье? Наверное, это было бы чересчур. Все равно подготавливаться на все возможные случаи не удастся.

И не потому, что этих случаев много (и заметьте – ни слова не было сказано о том, как нарисовать произвольный четырехугольник, произвольную тра-

пецию, произвольный параллелограмм, и так далее вплоть до произвольной семиугольной пирамиды). Главное – не всегда нужно рисовать самую типичную фигуру, о которой идет речь в задаче. Иногда, напротив, надо анализировать частные случаи, смотреть, что происходит в предельных ситуациях. В общем, рисование чертежа к геометрической задаче – дело творческое. Иногда нарисовать хороший чертеж столь же трудно или даже труднее, чем решить задачу. Эскизы (о которых не было сказано ни слова) не менее важны, чем точные чертежи.

Итак, когда вам скажут «нарисуйте произвольный треугольник», быстро составьте целевую функцию, найдите, где она принимает наибольшее (или наименьшее, смотря какую функцию составили) значение, разложите ответ в цепную дробь, «оборвите» ее в подходящем месте – и рисуйте на здоровье!

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Электрические цепи постоянного тока

Ю. ЧЕШЕВ

ОСНОВНЫМ ЗАКОНОМ ДЛЯ РАСЧЕТА электрических цепей является, конечно, закон Ома. Однако в случае сложных, разветвленных цепей удобно пользоваться правилами Кирхгофа. Напомним их.

Первое правило непосредственно вытекает из закона сохранения электрического заряда и утверждает, что алгебраическая сумма токов в точке разветвления (узле) электрической цепи равна нулю. Согласно второму правилу, которое является следствием закона сохранения энергии, в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения.

Рассмотрим несколько конкретных задач на электрические цепи постоянного тока.

Задача 1. Определите среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медной проволоке, площадь поперечного сечения которой $S =$

$= 1,0 \text{ мм}^2$, при протекании по ней постоянного тока $I = 1 \text{ А}$. Считать, что каждый атом меди дает один свободный электрон.

По определению, сила тока в металлическом проводнике равна

$$I = envS,$$

где e – заряд электрона, n – концентрация электронов, v – искомая скорость их упорядоченного движения.

Поскольку на каждый атом меди приходится один свободный электрон, число электронов в объеме проволоки равно числу атомов N . Тогда концентрация свободных электронов в объеме проволоки V равна

$$n = \frac{N}{V}.$$

Число атомов легко найти, зная постоянную Авогадро N_A , т.е. число атомов в одном моле вещества, и количество молей, равное отношению массы меди

m к ее молярной массе M :

$$N = N_A \frac{m}{M} = N_A \frac{\rho V}{M},$$

где ρ – плотность меди.

Таким образом, скорость упорядоченного движения электронов равна

$$\begin{aligned} v &= \frac{I}{enS} = \frac{IM}{eN_A \rho S} = \\ &= 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм/с}. \end{aligned}$$

Задача 2. При замкнутом ключе K вольтметр V_1 показывает $0,8\text{Е}$, где Е – ЭДС батареи (рис.1). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разом-

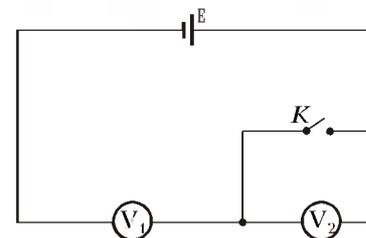


Рис. 1

кнутым ключе, если их сопротивления одинаковы?

Обозначим через r внутреннее сопротивление батареи, а через r_B – внутренние сопротивления вольтметров. Тогда, согласно закону Ома, при замкнутом ключе ток в цепи равен

$$I_0 = \frac{\text{Е}}{r + r_B},$$

а напряжение, которое показывает вольтметр V_1 , равно

$$U_0 = I_0 r_b = \frac{Er_b}{r + r_b} = 0,8E.$$

Отсюда получаем

$$r_b = 4r.$$

После размыкания ключа ток через батарею равен

$$I = \frac{E}{r + 2r_b}.$$

а напряжения на вольтметрах V_1 и V_2 одинаковы и равны

$$U_1 = U_2 = Ir_b = \frac{Er_b}{r + 2r_b} = \frac{4}{9}E.$$

Задача 3. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС E и внутренним сопротивлением r , помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис.2).

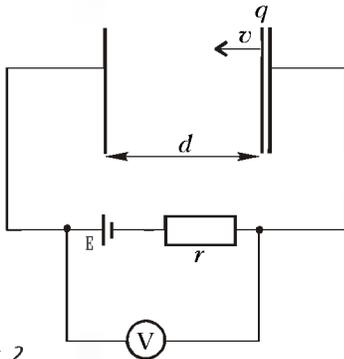


Рис. 2

Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если пластину двигать с постоянной скоростью v ? Расстояние между обкладками конденсатора равно d .

При движении заряженной пластины с постоянной скоростью на обкладках конденсатора появляются заряды, обеспечивающие такую разность потенциалов между пластинами, чтобы ток в цепи, а следовательно, и напряжение на батарее оставались постоянными.

Пусть в некоторый момент времени расстояние между перемещаемой заряженной пластиной и правой пластиной конденсатора равно x . Обозначим заряды левой и правой обкладок конденсатора в этот момент через q_1 и q_2 . Так как батарея не создает зарядов, а способна только перемещать их, то в силу закона сохранения заряда $q_1 + q_2 = 0$, или $q_1 = -q_2$. Эти заряды создают внутри конденсатора электрическое поле, напряженность которого равна

$$E_1 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S},$$

а заряд q пластины создает поле напряженностью

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S},$$

где S – площадь обкладок конденсатора и внесенной в него пластины. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, разность потенциалов на обкладках конденсатора равна

$$U = (E_1 + E)x + (E_1 - E)(d - x).$$

Положив $x = x_0 + vt$, найдем временную зависимость зарядов, возникающих на обкладках конденсатора:

$$q_1(t) = \frac{U\epsilon_0 S}{d} + \frac{q}{2} - \frac{qx_0}{d} - \frac{qv}{d}t.$$

Теперь нетрудно определить ток через батарею:

$$I = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = -\frac{qv}{d}$$

и разность потенциалов на клеммах батареи:

$$U = E - Ir = E + \frac{qvr}{d}.$$

У идеального вольтметра его внутреннее сопротивление велико, так что током через вольтметр можно пренебречь. В этом случае показания вольтметра совпадут с найденной разностью потенциалов.

Задача 4. В схеме, изображенной на рисунке 3, ЭДС E_1 первой батареи уменьшили на 1,5 В, после чего токи

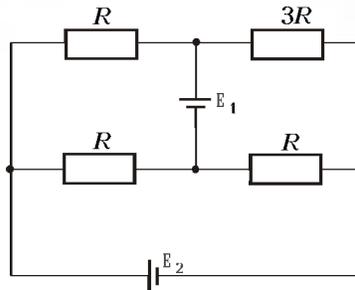


Рис. 3

на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС E_2 второй батареи, чтобы сила тока через эту батарею осталась прежней?

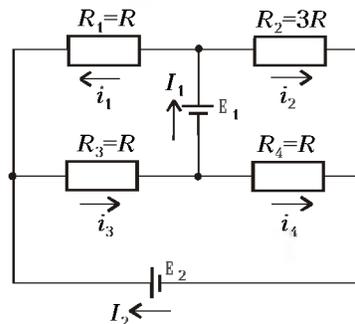


Рис. 4

Внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

Расставим токи на каждом участке цепи и введем соответствующие обозначения (рис.4). Согласно первому правилу Кирхгофа,

$$i_3 = i_1 + I_2 \text{ и } i_4 = I_2 - i_2.$$

Теперь рассмотрим три замкнутых контура, каждый из которых содержит источник тока, и запишем для них второе правило Кирхгофа:

$$E_1 = i_1 R_1 + (i_1 + I_2) R_3,$$

$$E_1 = i_2 R_2 - (I_2 - i_2) R_4,$$

$$E_2 = (i_1 + I_2) R_3 + (I_2 - i_2) R_4.$$

Отсюда найдем ток I_2 , протекающий через батарею с ЭДС E_2 :

$$I_2 = \frac{4E_2 - E_1}{5R}.$$

При изменении ЭДС E_1 на ΔE_1 ток через батарею с ЭДС E_2 равен

$$I_2^* = \frac{4(E_2 + \Delta E_2) - (E_1 + \Delta E_1)}{5R}.$$

По условию задачи токи I_2 и I_2^* равны между собой. Приравняв полученные выражения для этих токов, находим искомое изменение ЭДС второй батареи:

$$\Delta E_2 = \frac{\Delta E_1}{4} = 0,375 \text{ В},$$

при этом ясно, что ЭДС второй батареи тоже нужно уменьшить.

Задача 5. В схеме, изображенной на рисунке 5, в начальный момент

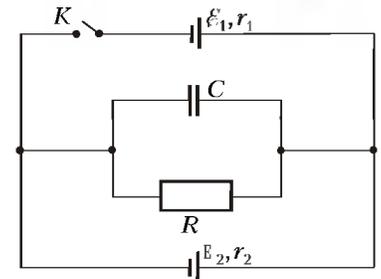


Рис. 5

ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через конденсатор C сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС первой батареи $E_1 = 40$ В, ее внутреннее сопротивление $r_1 = 200$ Ом, ЭДС второй батареи $E_2 = 80$ В, ее внутреннее сопротивление $r_2 = 50$ Ом, сопротивление резистора $R = 150$ Ом.

По закону Ома ток в замкнутой цепи до замыкания ключа K равен

$$I_0 = \frac{E_2}{R + r_2}.$$

Разность потенциалов на резисторе, а значит, и на конденсаторе равна

$$U_C = \frac{E_2 R}{R + r_2}.$$

Так как напряжение на конденсаторе мгновенно измениться не может, то и сразу после замыкания ключа оно равно U_C . Поэтому через батарею с ЭДС E_1 потечет ток

$$I_1 = \frac{E_1 - U_C}{r_1} = \frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2 R}{r_1(R + r_2)} = -0,1 \text{ A}.$$

Ток через резистор в момент замыкания ключа не изменился. Покажем, что ток через батарею с ЭДС E_2 также не изменился. Пусть в момент замыкания ключа ток через батарею с ЭДС E_2 равен I_3 . Тогда из закона Ома получаем

$$E_2 = I_3 r_2 + I_0 R = I_3 r_2 + \frac{E_2 R}{R + r_2},$$

откуда находим

$$I_3 = \frac{E_2}{R + r_2} = I_0.$$

Из первого правила Кирхгофа

$$I_3 + I_1 = I_0 + I_C, \text{ или } I_C = I_1.$$

Это означает, что ток через конденсатор в момент замыкания ключа равен току через батарею с ЭДС E_1 :

$$I_C = I_1 = -0,1 \text{ A}.$$

Задача 6. При замкнутом ключе K (рис.6) установившееся напряжение на конденсаторе равно $U_1 = 27 \text{ В}$. Найдите ЭДС источника тока. Оп-

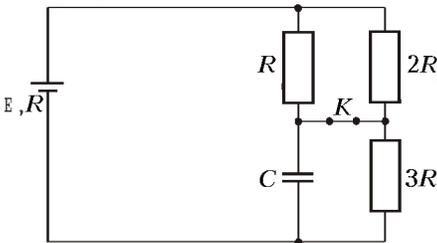


Рис. 6

ределите также установившееся напряжение на конденсаторе U_2 после размыкания ключа.

Обозначим токи через батарею, резисторы R и $2R$ при замкнутом ключе через I , I_1 и I_2 соответственно. Из первого правила Кирхгофа следует, что

$$I = I_1 + I_2.$$

Резисторы R и $2R$ включены параллельно, поэтому разности потенциалов на них равны:

$$I_1 R = I_2 \cdot 2R.$$

Из второго правила Кирхгофа для замкнутого контура, содержащего источник тока и резисторы R и $3R$, находим

$$E = IR + I_1 R + I \cdot 3R.$$

Кроме того, очевидно, что установившийся ток равен

$$I = \frac{U_1}{3R}.$$

Из полученных уравнений находим ЭДС батареи:

$$E = 4IR + \frac{2}{3}IR = \frac{14}{3}IR = \frac{14}{9}U_1 = 42 \text{ В}.$$

После размыкания ключа и установления стационарного режима ток через резистор R прекращается и разность потенциалов на обкладках конденсатора C становится равной разности потенциалов на клеммах батареи. Следовательно, ток течет только через резисторы $2R$ и $3R$. По закону Ома

$$E - I^* R = I^* \cdot 5R,$$

откуда находим установившийся ток через батарею после размыкания ключа:

$$I^* = \frac{E}{6R}$$

и установившееся напряжение на конденсаторе:

$$U_2 = I^* \cdot 5R = \frac{5}{6}E = 35 \text{ В}.$$

Задача 7. В электрической схеме, представленной на рисунке 7, ключ K в начальный момент замкнут. После размыкания ключа в цепи выделяется

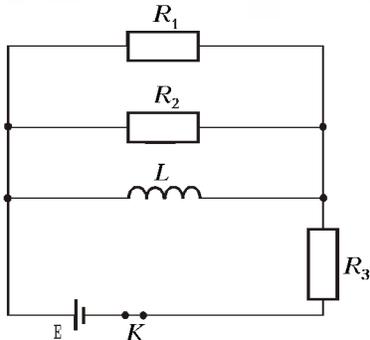


Рис. 7

количество теплоты Q . Чему равна ЭДС батареи E ? Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 ? Индуктивность катушки L ,

внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

При замкнутом ключе в контуре, содержащем батарею, резистор R_3 и катушку, устанавливается ток

$$I = \frac{E}{R_3}$$

(разность потенциалов на катушке индуктивности равна нулю). При этом катушка с индуктивностью L приобретает энергию

$$W_0 = \frac{LI^2}{2} = \frac{LE^2}{2R_3^2}.$$

После размыкания ключа эта энергия выделится в виде тепла на резисторах R_1 и R_2 (через резистор R_3 ток течь не будет), т.е.

$$Q = W_0,$$

откуда

$$E = R_3 \sqrt{\frac{2Q}{L}}.$$

Пусть в некоторый момент времени t токи через резисторы R_1 и R_2 равны I_1 и I_2 . Тогда количества теплоты, выделяющиеся в этих резисторах за небольшой интервал времени Δt , равны

$$\Delta Q_1 = I_1^2 R_1 \Delta t \text{ и } \Delta Q_2 = I_2^2 R_2 \Delta t.$$

Так как резисторы соединены параллельно, разности потенциалов на них равны:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = U,$$

поэтому

$$\Delta Q_1 = \frac{U^2 \Delta t}{R_1} \text{ и } \Delta Q_2 = \frac{U^2 \Delta t}{R_2}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\Delta Q_1 R_1 = \Delta Q_2 R_2.$$

В начальный момент времени $t = 0$ количества теплоты, выделившиеся на резисторах, равны нулю, откуда получаем

$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2.$$

Вместе с тем,

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

Окончательно находим

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + R_1/R_2} \text{ и } Q_2 = \frac{Q}{1 + R_2/R_1}.$$

Задача 8*. В схеме, изображенной на рисунке 8, заданы ЭДС батареи E , сопротивление резистора R , индуктивности сверхпроводящих катушек L_1 и L_2 . Сначала замыкают ключ K_1 , а через некоторое время, когда ток в цепи достигает значения I_0 , замыка-

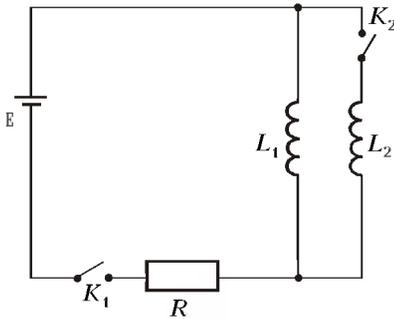


Рис. 8

ют ключ K_2 . Найдите установившиеся значения токов через катушки. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

После замыкания ключа K_1 начальный ток через катушку с индуктивностью L_1 равен нулю, а затем он постепенно возрастает до значения I_0 . Из закона Ома напряжение на катушке равно

$$U_{L_1} = E - I_0 R.$$

После замыкания ключа K_2 напряжения на катушках одинаковы и равны

$$\frac{L_1 \Delta I_1}{\Delta t} = \frac{L_2 \Delta I_2}{\Delta t},$$

где I_1 и I_2 – токи, протекающие через катушки с индуктивностями L_1 и L_2 . Из последнего уравнения следует, что

$$L_1 \Delta I_1 = L_2 \Delta I_2, \text{ или } L_1 (I_1 - I_0) = L_2 I_2$$

(начальный ток через вторую катушку равен нулю). После того как токи через катушки установились, напряжения на них равны нулю. Тогда ток, протекающий через резистор R , равен

$$I = I_1 + I_2,$$

или, в соответствии с законом Ома,

$$I = \frac{E}{R} = I_1 + I_2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим установившиеся токи:

$$I_1 = \frac{L_2 E + L_1 I_0 R}{(L_1 + L_2) R} \text{ и } I_2 = \frac{L_1 (E - I_0 R)}{(L_1 + L_2) R}.$$

Упражнения

1. После замыкания ключа K в схеме, представленной на рисунке 9, заряд кон-

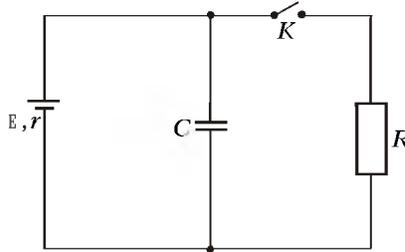


Рис. 9

денсатора уменьшился в полтора раза. Найдите внутреннее сопротивление батареи, если $R = 10$ Ом.

2. В схеме, представленной на рисунке 10, в начальный момент ключ K замкнут.

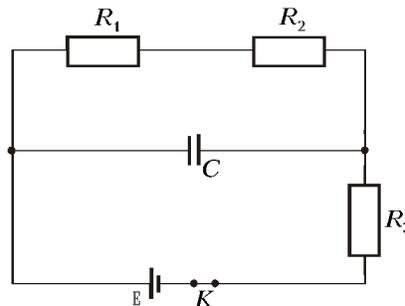


Рис. 10

Какое количество теплоты выделится во всей цепи после размыкания ключа? Сколько тепла выделится при этом в каждом из резисторов?

3. Ключи K_1 и K_2 в схеме на рисунке 11 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя K_2

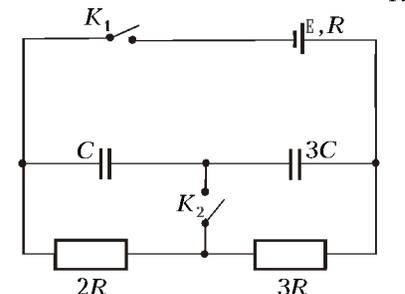


Рис. 11

разомкнутым. В результате на конденсаторе емкостью C устанавливается напряжение $U_1 = 15$ В. Найдите ЭДС источника тока. Каким станет установившееся

напряжение U_2 на конденсаторе емкостью C после замыкания ключа K_2 при замкнутом K_1 ?

4. В схеме на рисунке 12 в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока

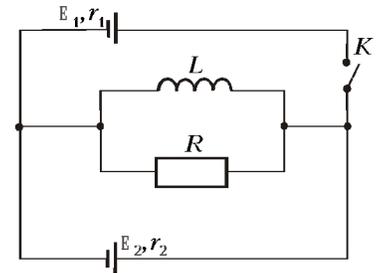


Рис. 12

через резистор сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС первой батареи $E_1 = 10$ В, ее внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление резистора $R = 4$ Ом.

5. В схеме, изображенной на рисунке 13, известны ЭДС батареи E , сопротивление резистора R , индуктивности сверхпроводящих катушек L_1 и L_2 ($L_1 > L_2$). Сначала замыкают ключ K_1 , а через

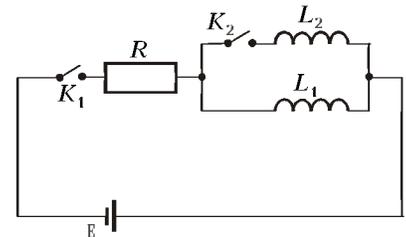


Рис. 13

некоторое время – ключ K_2 . Известно, что установившиеся токи через катушки оказались одинаковыми. Определите величину тока, протекающего через резистор в момент замыкания ключа K_2 . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Вниманию наших читателей!

Желающие получить обновленный текст книги А.И. Черноуцана «Физика. Справочник для старшеклассников и абитуриентов» (М.: ЭКСМО-ПРЕСС, 2000), могут найти его на сайте Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина:

<http://www.citde.gubkin.ru/de/demo/physics>

или на сайте Vivos Voco!:

<http://vivovoco.nns.ru>

Полный текст книги в PDF-формате занимает примерно 1,2 Мб.

VII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

Заключительный этап очередной открытой олимпиады школьников по астрономии и физике космоса прошел с 7 по 13 апреля 2000 года в городе Белгороде. Как и в прошлые годы, научное и идейное руководство олимпиадой осуществляло Астрономическое общество.

В олимпиаде приняли участие 140 школьников из 30 регионов России, а также из Украины и Белоруссии. Как обычно, участники олимпиады соревновались в трех возрастных категориях: 8 – 9, 10 и 11 классы (здания для учащихся 8 и 9 классов немного различались). Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех участников по 8 – 9 классам, двух десятиклассников, двух одиннадцатиклассников и (дополнительно) победителей Российской и Международной олимпиад 1999 года, а также победителей олимпиады ННЦ 2000 года.

Но теоретическом туре школьником было предложено по 6 задач. В задании творческо-практического тура для 8 – 9 классов обе задачи носили исследовательский характер, а для 10 – 11 классов одна задача была творческой, а другая практическая. Каждая задача первого тура оценивалась по системе 8 + 2 балла (8 – за формально правильное полное решение, 2 – за дополнительное развитие темы), второго – по системе 16 + 4.

Победителям и призером олимпиады были вручены дипломы, ценные подарки и главный приз олимпиады: для 11-классников – приглашение на физические и астрономические отделения ведущих вузов России (университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Екатеринбург), а для учащихся 8 – 10 классов – приглашение на V Международную астрономическую олимпиаду и на осеннюю астрономическую школу.

Просим все ваши вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач прошедшей олимпиады и другим вопросам, а также интересные задачи, условия которых вы хотели бы видеть в будущих олимпиадах) сообщить автору по электронной почте: govrilov@issp.os.ru или по почтовому адресу: 142432 п. Черноголовка Московской обл., Институтский проспект, 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач олимпиады и список ее призеров.

Теоретический тур

При решении любой задачи можно было пользоваться данными таблицы Солнечной системы и картой звездного неба.

8 класс

1. Известно, что из-за атмосферной рефракции в любом месте Земли Солнце раньше встает и позже заходит. (Так, сегодня в Белгороде Солнце взошло раньше на 3 минуты 05 секунд и зайдет позже на 3 минуты 05 секунд.) Значит, вся наша планета получает больше солнечной энергии, чем получала бы при отсутствии рефракции. Так откуда же берется дополнительная энергия?

2. При каком положении Луны можно наблюдать наиболее продолжительные затмения звезд Луной – когда она вблизи апогея или перигея? Какие еще условия вы можете назвать, при которых звезды будут дольше находиться за Луной?

3. Сегодня в Белгороде Солнце будет заходить в течение 2 минут 47 секунд. А какое время длится заход Солнца на Марсе? Вычислите эту продолжительность для случая захода Солнца на экваторе Марса. При решении задачи считайте, что Марс обращается вокруг Солнца по круговой орбите.

4. В повести Стругацких «Полдень, XXII век» герой попадает на планету Леонида, очень похожую на Землю: «Среди мигающих звезд неторопливо прошло через зенит яркое белое пятнышко. Комов приподнялся на локтях, следя глазами за ним. Это был «Подсолнечник» – полутораклометровый десантный звездолет сверхдальнего действия. Сейчас он обращался вокруг Леониды [по круговой орбите] на расстоянии двух мегаметров от поверхности. Стоит подать сигнал бедствия, и оттуда придут на помощь».

Насколько хорошим зрением обладал Комов? Обычно считается, что предельное разрешение глаза зорого

человека составляет 1' (одну угловую минуту).

5. С каким периодом меняются фазы Земли для наблюдателя на Луне? Объясните, почему так происходит. Выразите ответ в земных и лунных сутках.

6. В набросках к научно-фантастическому рассказу «Вахта Хромова» описывается эпизод, когда оператор научной станции, расположенной вблизи одной из планет Солнечной системы, запрашивает «Центр» (Землю): «Отправив сообщение, Алексей продолжал сидеть у монитора и ждать... Ждать ответа. Он знал, что даже теоретически, даже если «Центр» примет решение за считанные минуты, все равно ответ придет не ранее чем через пять часов...»

На какой планете работал Алексей?

9 класс

1–4. См. задачи 1 – 4 для 8 класса.

5. См. условие задачи 4.

...Но в этот раз Комов не подал сигнал бедствия. Представится ли ему такая возможность во время следующего витка «Подсолнечника»? Считайте, что все параметры Леониды в точности соответствуют земным, Комов находится на экваторе планеты, а «Подсолнечник» обращается вокруг нее по меридианальной орбите.

6. На рисунке 1 представлен вид Солнечной системы: само Солнце, че-

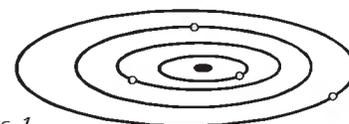


Рис. 1

тыре ближайшие планеты и их орбиты. Так видят нас «зеленые человечки»; точнее, на рисунке представлен в некотором масштабе результат компьютерной обработки многолетних наблюдений «зеленых астрономов». Известно, что положение планет соответствует середине марта (15 марта) на Земле. Найдите, из какого созвездия «зеленые человечки» наблюдали нас.

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 – 9 классов.

2. В созвездии Ориона, на расстоя-

нии 120 световых лет от нас, земные астрономы обнаружили звезду, по всем параметрам аналогичную Солнцу. Цивилизация «зеленых человечков», живущая на одной из планет, обращающейся вокруг той звезды, также заинтересовалась нашим Солнцем. Измерения параллакса нашего Солнца, произведенные астрономами той цивилизации (согласно их классическим правилам измерения параллакса), дали результат $0,039''$. Найдите продолжительность года у «зеленых человечков».

3. Найдите звездную величину Луны в новолуние (когда есть только пепельный свет). Видимые с Земли звездные величины Солнца и Луны в полнолуние равны $-26,8^m$ и $-12,7^m$ соответственно.

4. Оцените массу венерианской атмосферы.

5–6. См. задачи 5–6 для 9 класса.

11 класс

1. См. задачу 1 для 8–10 классов.

2–3. См. задачи 2–3 для 10 класса.

4. Для того чтобы измерить годичный параллакс ядра нашей Галактики, предложено построить радиоинтерферометр с далеко отстоящими антеннами и наблюдать «точечный» радиоисточник в ядре. Каким примерно должно быть расстояние D между антеннами, если предполагается вести наблюдения на длине волны $\lambda \approx 1$ см?

5. Обнаружена затменно-двойная звезда. Размер второй звезды пренебрежимо мал по сравнению с размером первой. Известно, что большие оси орбит звезд лежат на луче зрения. Продолжительность затмения второго компонента первым и прохождении второго компонента по диску первого равны, соответственно, $T_1 = 8,7$ часа и $T_2 = 11,3$ часа при периоде обращения $T = 17$ суток. Оцените эксцентриситет орбит звезд.

6. Две звезды имеют одинаковые массы, одинаковые плотности и одинаковые давления в центре. Однако у одной из звезд ядро состоит из нормальной смеси ионизованных водорода и гелия (количество атомов гелия примерно в 10 раз меньше, чем атомов водорода), а у второй – целиком из полностью ионизованного углерода. Если температура в ядре первой звезды составляет $2 \cdot 10^7$ К, то чему она равна в ядре второй звезды? Газы считать идеальными. Числа протонов в ядрах атомов: Н – 1, He – 2, C – 6. Атомные массы ядер атомов: $A_H = 1$, $A_{He} = 4$, $A_C = 12$.

Творческо-практический тур

8–9 классы

7. Вам предстоит провести экскурсию по звездному небу без телескопа и биноклей. Основная ваша задача – дать небесные ориентиры, определяющие наше место во Вселенной. Наметьте подходящее время экскурсии. Пометьте на карте центр Галактики, направления вдоль ее рукавов, отдельные звездные и пылевые облака, очертания Местной системы, видимые простым глазом галактики и т.д. Объясните смысл использованных вами значков. Желательны комментарии.

8. Предполагается, что на расстоянии около 60 а.е. от Солнца появилась новая планета, обращающаяся по круговой орбите в плоскости, отличающейся от эклиптики не более чем на 10° . Видимая с Земли звездная величина этой планеты составляет 18^m . Планету планируется обнаружить с помощью 1-метрового телескопа с регистрирующей системой. Рабочее поле телескопа $20 \times 20'$, а регистрирующая система (например, фотопластинка) может зафиксировать объект 17^m (на темном небе) при минимальной экспозиции 10 минут.

Разработайте программу работы (наблюдений, обработки данных и т.п.) для обнаружения этой планеты. Сколько времени потребуется, чтобы заведомо зарегистрировать этот объект? Опишите все необходимые условия для проведения наблюдений (регистрации) наиболее оптимальным образом. Каких конфигураций (положений планет, небесных тел) следует избегать? Для простоты эксперимента 1-метровый телескоп разместите в окрестностях Белгорода.

10–11 классы

7. **Старение фотонов** (творческая задача). Вам, должно быть, известно, что в спектрах далеких галактик наблюдается красное смещение, причем оно тем больше, чем дальше от нас расположена галактика. В настоящее время это объясняется в рамках модели расширяющейся Вселенной, согласно которой галактики удаляются от нас с относительной скоростью $V = HR$ (где $H = 75$ км/(с · Мпк) – постоянная Хаббла, R – расстояние до галактики), а красное

смещение – результат связанного с этой скоростью эффекта Доплера. Однако некоторое время назад была распространена гипотеза, что красное смещение в спектрах далеких галактик связано не с эффектом Доплера, а со старением фотонов. Идея этой гипотезы состоит в том, что с течением времени фотоны теряют свою энергию (т.е. их энергия уменьшается по закону $E = E_0 e^{-t/T}$, где t – время существования фотона, а T – некоторая константа). Таким образом, просто получается, что свет от далеких галактик идет очень долго, за это время фотоны теряют часть своей энергии, т.е. «краснеют».

Рассмотрите гипотетическую ситуацию: пусть фотоны действительно стареют, причем стареют в 1000 раз быстрее, чем это следует из наших наблюдений (т.е. $\Delta E/\Delta t$ в 1000 раз больше, чем у нас). Какие теории эволюции Вселенной могли бы существовать в этом случае? Что бы изменилось в теории расширяющейся Вселенной? Догадались ли бы ученые, что существует именно старение фотонов? Учтите, что современные приборы, измеряющие лучевые скорости по эффекту Доплера, фиксируют эти скорости с точностью вплоть до нескольких метров в секунду (скажем, 3 м/с).

8. **Звездный ветер Р Лебеда** (практическая задача). Это задание посвящается 400-летию открытия самой знаменитой из звезд, активно теряющих вещество. 18 августа 1600 года голландский картограф и математик Виллем Блау (тот самый, что написал «Космографию», по которой учился Петр I) обнаружил в Лебеде новую звезду. В XVII веке ее блеск дважды возрастал до 3-й и падал до 6–7-й величин, но с начала XVIII века менялся мало и до сих пор остается близким к 5-й величине. В 1886 году Пикеринг привлек внимание к необычному спектру

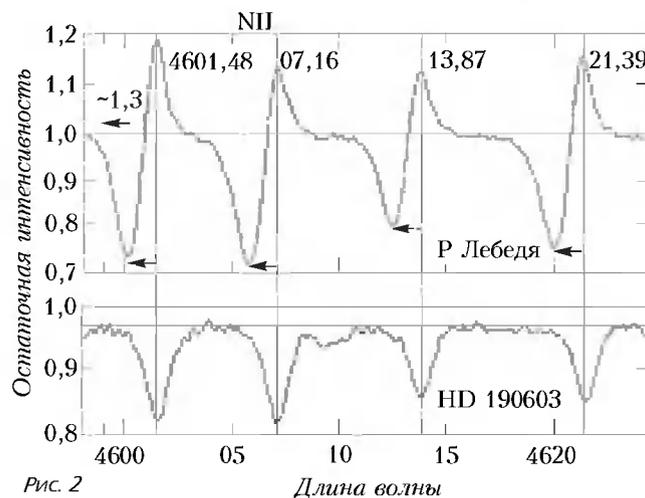


Рис. 2

Р Лебеда. Перед вами (рис.2) небольшой его участок с четырьмя линиями ионизованного азота и тот же участок, взятый из спектра HD 190603 – звезды, близкой к Р Лебеда по температуре и светимости. Оба спектра получены с помощью спектрографа в фокусе 1-метрового телескопа САО РАН. В спектрах большинства звезд (в том числе и HD 190603) наблюдаются линии поглощения, абсорбции (в них интенсивность излучения ниже уровня излучения в непрерывном спектре), а в спектрах туманностей и некоторых звезд с протяженными оболочками – линии излучения, эмиссии. В спектре Р Лебеда почти все линии абсорбционно-эмиссионные. Их профили так и называют «профили типа

Р Лебеда».

а) Пользуясь прилагаемой простейшей схемой (рис.3) расширяющейся оболочки (звездного ветра), объясните специфическую форму «профиля типа Р Лебеда». Пометьте нужными буквами части профиля, формирующиеся в соответствующих частях оболочки.

б) По прилагаемому фрагменту спектра оцените скорость звездного ветра

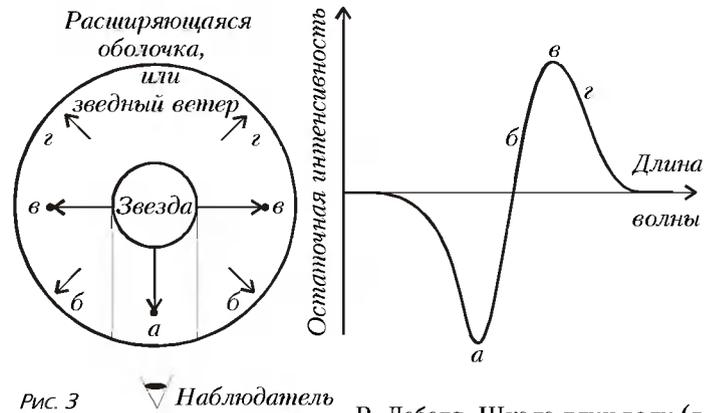


Рис. 3

Наблюдатель

Р Лебеда. Шкала длин волн (в ангстремах) дана для неподвижного источника.

Публикацию подготовил
М.Гаврилов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени получили

Аболмасов П. – Москва, 11 кл.,
Бадьин Д. – Лесной Свердловской обл., 10 кл.,
Бакай Д. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Балчев Р. – Саратов, 10 кл.,
Башаков А. – Тихвин, 10 кл.,
Булах В. – Тула, 9 кл.,
Игнатович А. – Златоуст, 8 кл.,
Константинов С. – Челябинск, 9 кл.,
Копосов С. – Москва, 11 кл.,
Нагаев М. – Белгород, 9 кл.,
Тыклин А. – Москва, 9 кл.

Дипломы II степени получили

Боченков С. – Рязань, 9 кл.,
Васильев С. – Екатеринбург, 10 кл.,
Велижанин Д. – Полевской, 11 кл.,
Гедерцев А. – Санкт-Петербург, 10 кл.,
Григорович Е. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Жабин В. – Рязань, 11 кл.,

Зиновьев Д. – Челябинск, 10 кл.,
Иванов А. – Челябинск, 10 кл.,
Квасов И. – Дзержинск Нижегородской обл., 9 кл.,
Ким А. – Оренбург, 10 кл.,
Клиньшов В. – Нижегородская область, 11 кл.,
Лебедев А. – Москва, 9 кл.,
Леликов А. – Липецк, 11 кл.,
Лисин Е. – Бугульма, 11 кл.,
Сафонов Б. – Екатеринбург, 8 кл.,
Семидоцкий Г. – Белгород, 9 кл.,
Субботин М. – Рязань, 7 кл.,
Сьвоваткин Д. – Новоросси́ск, 11 кл.,
Устюжанин А. – Ижевск, 11 кл.,
Цветков Е. – Великий Новгород, 10 кл.,
Шушкин И. – Волго́донск, 11 кл.

Дипломы III степени получили

Ангер В. – с. Ижевское Рязанской обл., 11 кл.,
Бережной А. – Белгород, 11 кл.,

Бобров С. – Ростов-на-Дону, 11 кл.,
Борзов И. – Тула, 8 кл.,
Бургар А. – Волго́донск, 10 кл.,
Верёвкин К. – Гатчина, 9 кл.,
Веремьёв А. – ст. Ленинградская Краснодарского кр., 9 кл.,
Гришель М. – Минская обл., 11 кл.,
Дегтярев В. – Оренбург, 11 кл.,
Кузькин А. – Сыктывкар, 10 кл.,
Ловягин Н. – Сыктывкар, 8 кл.,
Мананников А. – Раменское, 10 кл.,
Осминин К. – Москва, 11 кл.,
Путинин В. – Липецк, 11 кл.,
Рыжов В. – Железногорск Курской обл., 9 кл.,
Сахаров О. – Нальчик, 9 кл.,
Соколовский К. – Москва, 10 кл.,
Стивак И. – Курск, 10 кл.,
Хазиев И. – Прохладный, 10 кл.

IX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Очередная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный Марафон» («ИМ-2000») проходила в рамках Европейского фестиваля науки, который состоялся в России с 1 по 8 октября 2000 года. Организовал фестиваль Интеллект-клуб «Глюон» совместно Государственным научным центром РФ «Институт физики высоких энергий» и при поддержке «Euroscience» (Париж), Союза ученых Болгарии (София), администрации Протвино и ряда других научных и образовательных учреждений России. На Европейский фестиваль науки приехали делегации из различных городов России и СНГ, а также гости из Финляндии.

Задачи

Письменный индивидуальный тур

Математика

- Найдите сумму цифр всех натуральных чисел
а) от 1 до 2000; б) от 1 до 10^n .

Участники и гости фестиваля собрались в Протвино, красивейшем уголке Подмосковья, который является также и одним из ведущих мировых центров по физике элементарных частиц. Каждый день фестиваля был насыщен научными выступлениями школьников, студентов, аспирантов и ученых, а школьники участвовали также в олимпиаде «Интеллектуальный марафон» — как в личных, так и в командных соревнованиях.

Среди научных докладов дипломом I степени жюри отметило работу ученика ФМЛ 1511 при МИФИ Сергея Колерова по теме «Фуллерены и нанотрубки». Дипломы II степени получили доклады студентов Марины Хомяковой — «Сферические модели Платоновых и Архимедовых тел» (Пермь, ПГПУ), Ивана Тищенко — «Организация и поддержка общестуденческой сети» (Старый Оскол, СТИ МГИСиС), школьников Людмилы Илюхиной (Норильск) и Моксимо Сырватка (Уфа, школа 42) — «Неровенство Брунна — Минковского и одно свойство выпуклых функций». Дипломы III степени были присуждены Светлане Ельшиной (Пермь, ПГПУ) за работу «Классификация собственных движений плоскости Лобачевского по модели Пуанкаре», а также школьником из Уфы (школа 42) Константином Николаеву — «Кривая линейка», Айрату Ганиеву — «Сдвиги множеств и выпуклые многоугольники», Наталье Зацепиной — «Об одном свойстве выпуклых функций».

Абсолютным победителем олимпиады «ИМ-2000» в командном зачете стало командо ФМЛ 31 Челябинска, она же заняла I место в командном туре по физике и II место в туре «История научных идей и открытий». Второе место в общих командных соревнованиях завоевала команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). I место в туре «История научных идей и открытий» и в туре по математике. Третье место досталось команде лицея 60 из Уфы (II место в туре «История научных идей и открытий»).

Абсолютным победителем олимпиады в индивидуальном зачете стал Кирилл Королев (Челябинск, ФМЛ 31), он же победил в индивидуальном зачете по физике и занял III место по математике. Вторым и третьим в общем зачете стали Андрей Манаков и Максим Карманов (также из ФМЛ 31 Челябинска). Первое место в индивидуальном зачете по математике занял Максим Сырватка (Уфа, школа 42). Вторые места по математике и физике завоевали Андрей Ухоботов (Челябинск, ФМЛ 31) и Константин Тимирбаев (Уфа, лицей 60).

Среди специальных призов отметим приз «Самому юному участнику» — его получил Евгений Молочнов из Краснодара.

Организаторы фестиваля выражают признательность всем, кто помог подготовить и провести этот научный праздник, и в первую очередь — компаниям «ИС» и «Диалог-МИФИ» (предоставившим замечательные подарки победителям и участникам фестиваля), а также администрации города Протвино.

X Международная олимпиада «Интеллектуальный Марафон» состоится в октябре — ноябре 2001 года в рамках Международного фестиваля «Дети. Интеллект. Культура». Заявки на участие всех заинтересованных организаций, школ, лицеев, гимназий, центров по работе с одаренными школьниками просим прислать не позднее 1 августа 2001 года по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., д. 15/6, корп.2, МИК «Глюон».

Телефон (095) 324-20-30; факс: (095) 396-82-27;
e-mail: olga@mics.msu.su или gluon@gola.net

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 1 \leq 0, \\ 2y^2 + 2y - x \leq 0. \end{cases}$$

3. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , J — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB (вневыписанная окружность), M — середина отрезка IJ , а $\angle A = \alpha$. Найдите $\angle BMC$.

4. Каждый член некоторой компании из n человек поздравил с праздником ровно k человек из той же компании. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди данных n человек найдутся два, поздравивших друг друга, если

а) $n = 20$; б) $n = 21$; в) n — любое натуральное число?

5. Можно ли разрезать а) квадрат; б) равнобедренный прямоугольный треугольник на конечное число равнобедренных трапеций?

6. В треугольнике ABC точка D — середина медианы AM . Прямая CD пересекает сторону AB в точке N . Найдите CN , если $BD = BM$, а $AN = a$.

7. Можно ли между числами $1^3, 2^3, \dots, n^3$ расставить знаки «плюс» или «минус» так, чтобы полученная алгебраическая сумма стала равна 0, если

а) $n = 1999$; б) $n = 2000$;
в) $n = 2001$?

Физика

1. Клин, имеющий форму прямоугольного треугольника (рис. 1), скользит

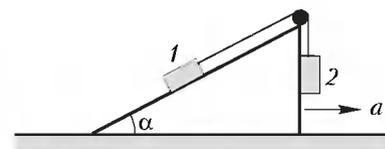


Рис. 1

вдоль горизонтальной поверхности с ускорением a . Через блок, установленный на вершине клина, перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены бруски массой m каждый. Определите, при каких значениях a брусок 2 будет двигаться вверх. Коэффициент трения скольжения брусков о поверхность клина μ , угол наклона клина к горизонтальной поверхности α . (Случай отрыва бруска 1 от поверхности клина не рассматривать.)

2. С какой минимальной начальной скоростью надо бросить мяч, чтобы перебросить его через стену высотой h и попасть в яму, расположенную за стеной на расстоянии L ?

3. Определите максимальную высоту, на которую может подняться воздушный шар радиусом $R = 10$ м, наполненный гелием до давления, равного атмосферному на поверхности Земли. Масса gondoly шара $M = 1000$ кг. Атмосферу считать изотермической ($T = 300$ К). Плотность воздуха у поверхности Земли $\rho_0 = 1,29$ кг/м³.

4. Тонкое металлическое кольцо радиусом R расположено в горизонтальной плоскости (параллельно поверхности земли) и имеет заряд Q . Через центр кольца перпендикулярно его плоскости проходит тонкий стержень, вдоль которого может скользить шарик с массой m и зарядом q . Определите возможные положения равновесия в системе и исследуйте их на устойчивость. Трение не учитывать.

5. Молекулярный ион водорода H_2^+ ионизируется мощным лазерным импульсом длительностью порядка 10 фс («кулоновский взрыв»). Оцените кинетическую энергию образовавшихся при ионизации протонов. Какова будет кинетическая энергия ядер, образовавшихся при фотоионизации молекулы HD^+ ? Масса дейтрона $m_D = 2m_p$, где m_p — масса протона. Равновесное расстояние между ядрами в системе равно 1 \AA .

6. N точек пространства соединены попарно одинаковыми резисторами сопротивлением R каждый. Между

двумя из них включен источник с ЭДС \mathcal{E} . Какая мощность выделяется в данной цепи?

7. Оцените время падения капли дождя радиусом $R = 0,1$ см с высоты $h = 1$ км. Плотность атмосферного воздуха $\rho_0 = 1,29$ кг/м³, плотность воды $\rho_v = 1$ г/см³. Как время падения зависит от размера капли?

Устный командный тур

Математика

1. Витя и Боря вычеркивают по очереди числа из таблицы:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Витя вычеркнул 4 числа, и Боря тоже вычеркнул 4 числа. Оказалось, что сумма чисел, вычеркнутых Борей, в 3 раза меньше суммы чисел, вычеркнутых Витей. Какое число осталось в таблице?

2. Найдите площадь, заштрихованную на рисунке 2, если точки делят

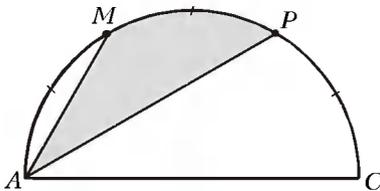


Рис. 2

полуокружность $AMPC$ на три равные части, а площадь полукруга равна S .

3. Наборщик рассыпал некоторое число, представляющее шестую степень натурального числа a . Найдите a , если цифры рассыпанного числа — 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.

4. Существует ли треугольник, который можно разрезать на три равных треугольника, подобных данному?

5. Существует ли

а) 2002-угольник, описанный около окружности, стороны которого равны (в некотором порядке) 1, 2, 3, ..., ..., 2002;

б) описанный 2000-угольник со сторонами 1, 2, 3, ..., 2000 в указанном порядке?

6. Можно ли из последовательности 1, $1/2$, $1/3$, ..., $1/n$, ... выделить

а) арифметическую прогрессию с 2000 членов;

б) бесконечную арифметическую прогрессию?

7. Расстояние AN от вершины A треугольника ABC до его ортоцентра N (ортоцентр — точка пересечения высот треугольника) равно радиусу описанной около треугольника ABC окружности. Чему может быть равен угол A ?

8. Различные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$. Найдите $x + y + z$.

9. Внутри сектора с прямым центральным углом расположены два полукруга (рис.3). Найдите заштрихованную площадь, если площадь, ограниченная двумя полуокружностями, равна S .

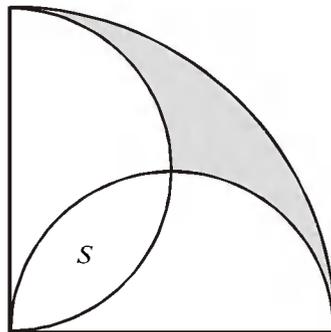


Рис. 3

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(x-v)^2 + (y-u)^2$, если $x^2 + y^2 = 1$, а $v^2 + u^2 = 4$.

11. Существует ли такая компания, в которой каждый ее участник имеет ровно 6 друзей, а каждые два участника имеют двух общих друзей?

12. Может ли n -значное число ($n > 1$) быть равным произведению своих цифр?

Физика

1. Каким будет выигрыш в силе при подъеме бочки по наклонной плоскости с помощью перекинутых через бочку веревок?

2. Два одинаковых сосуда с одним и тем же газом соединены горизонтальной трубкой с небольшим столбиком ртути посередине. В одном сосуде температура газа T_1 , а в другом T_2 . Сместится ли ртуть в трубке, если оба сосуда нагреть на одну и ту же разность температур ΔT ?

3. После удара молотком по одному концу длинной металлической трубы человек, находящийся у другого ее конца, будет слышать двойной удар. Почему?

4. Когда парусным судам легче войти в гавань: днем или ночью?

5. Металлический шарик заряжен до потенциала 1 В. Его вносят внутрь

сферической проводящей поверхности, заряженной до потенциала 1000 В, и касаются ее. Укажите, куда будут переходить заряды, и объясните почему.

6. Почему глаз человека может смотреть на Солнце, когда оно у горизонта, и не может, когда оно в зените?

7. Оцените время соударения двух одинаковых металлических шаров.

8. Какой термометр (при прочих равных условиях) более чувствителен: ртутный или спиртовой?

9. Какие очки нужны человеку в воздухе, если в воде он видит нормально?

10. Почему притягиваются два параллельных проводника с токами одного направления и отталкиваются два аналогичных электронных пучка в вакууме?

История научных идей и открытий

Математика

1. Запишите формулу, которую древние вавилоняне доказывали с помощью картинки, изображенной на рисунке 4.

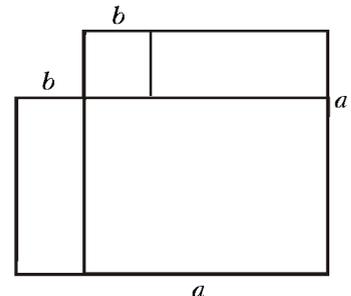


Рис. 4

2. Некий итальянский математик (1180–1240), живший в Пизе, написал несколько книг, по которым потом учились многие поколения математиков. Он же нашел удивительную последовательность $f_n: 1, 1, 2, 3, 5, \dots$. Как звали этого математика? Как называются открытые им числа? Выясните, какие числа f_n делятся на три.

3. Французский математик Роберваль, пытаясь вычислить площадь под одной аркой циклоиды, нашел некоторую кривую, названную им спутницей циклоиды. Ею оказалась синусоида (в современных обозначениях это график функции $y = 1 - \cos x$). Найдите площадь, ограниченную этим графиком на промежутке $[0; 2\pi]$ и осью Ox , не пользуясь интегралом, т.е. так же, как это делал Роберваль.

4. Некоторые математики XVII века полагали, что сумма ряда $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ равна $1/2$. Восстановите их рассуждения и, пользуясь сходны-

ми соображениями, найдите «сумму» $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$

5. Формула для площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$ была известна в глубинах древности и доказывалась разрезанием треугольника на части, из которых можно сложить параллелограмм. При выводе формулы объема пирамиды Архимеду пришлось воспользоваться соображениями, предвосхитившими появление в далеком будущем понятия интеграла. В связи с этим возникла задача: можно ли разрезать тетраэдр на конечное число многогранных частей, из которых удастся сложить параллелепипед? Задачу о возможности такого разрезания поставил в 1900 году один из величайших математиков рубежа XIX–XX веков. Как звали этого математика, как формулировалась поставленная им проблема, кто и когда ее решил?

Физика

1. Основываясь на модели расширяющейся Вселенной, один из выдающихся физиков нашего столетия пришел к выводу о необходимости наличия во Вселенной остаточного равновесного электромагнитного излучения, так называемого реликтового излучения, и оценил его температуру. Впоследствии это излучение было обнаружено экспериментально, и его параметры оказались близкими к расчетным. Кто, когда и из каких соображений пришел к этим выводам? Какова температура реликтового излучения?

2. Эксперименты какого выдающегося физика привели к созданию электродвигателя и генератора переменного тока? В каком году были опубликованы труды этого ученого с описанием результатов опытов?

3. В романе А.Толстого «Гиперболоид инженера Гарина» описана установка, позволяющая создавать мощ-

ный световой поток, способный производить огромные разрушения. Какие выдающиеся ученые и когда создали сначала теоретическую модель такой установки, а затем, много лет спустя, и ее саму? На какой идее основано ее устройство?

4. Для того чтобы заглянуть в глубь микромира, ученые применяют своеобразные аналоги микроскопа: ускорители элементарных частиц. На каких идеях основано их устройство? Какие типы ускорителей вы знаете? Когда они появились? Кто из ученых внес особенно большой вклад в их создание? Какие ускорители являются крупнейшими в мире, и где они находятся?

5. Кто из великих физиков двадцатого века был вратарем сборной своей страны по футболу?

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, Б.Алиев, А.Егоров,
А.Попов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Нужно стереть одну черту у цифры четыре, чтобы остался знак «+».

2. Предположим, что $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$, тогда в треугольниках BAE и DAC отрезки AD и AE соответственно являются одновременно медианами и биссектрисами. Следовательно, они являются также и высотами, а это противоречит тому, что из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр. Таким образом, лучи AD и AE не могут делить угол BAC на три равных угла.

3. Пусть первые два простых числа равны A и B , а третье равно C . Тогда составляется очевидная система уравнений:

$$\begin{cases} AB = C + 40, \\ A - B = C - 9. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$AB - A + B = 49,$$

или

$$(A+1)(B-1) = 48.$$

Число 48 имеет 10 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 и 48. Если первый из сомножителей принимает какое-либо из этих значений, то второй восстанавливается однозначно. Что ж, сделаем перебор:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A+1$	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
$B-1$	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1
A	0	1	2	3	5	7	11	15	23	47
B	49	25	17	13	9	7	5	4	3	2

Первые 4 варианта следует отбросить, поскольку для них произведение AB меньше 40 и потому не может превосходить на 40 какое-либо простое число. 5-й и 8-й варианты отбрасываем потому, что в них B – не простое число.

Для остальных вариантов получаем, соответственно, такие значения C : 9, 15, 29 и 54. Как видно, из них только третье (в 9-м случае) – простое число. Таким образом, стороны параллелепипеда равны 23, 3 и 29. Ну, а объем его равен $23 \times 3 \times 29 = 2001$. Вот ведь совпадение...

4. Общая площадь всех одиннадцати разверток равна $11 \times 6 = 66$ квадратных единиц, следовательно, размеры квадрата, из которого можно вырезать все эти развертки, не меньше чем 9×9 . На рисунке 1 показан способ разрезания наименьшего квадрата, придуманный членом клуба «Пифагор» города Дрездена Женей Новоминской.

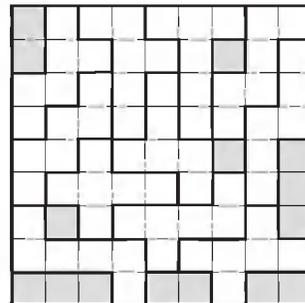


Рис. 1

5. Если бы в Стране Чудаков обитали только одни дураки или ровно один умный, считающий себя умным, то все опрашиваемые отвечали бы однообразно, и установить, кто из них кем является, было бы невозможно. Вместе с тем, если в Стране Чудаков имеется хотя бы двое умных, то они укажут друг на друга: «Он – умный», после чего, опрашивая одного из них, можно точно восстановить всю ситуацию.

Итак, в этой стране есть по крайней мере двое умных.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2000 г.)

11. На рисунке 2 одинаковыми цифрами отмечены прямоугольные треугольники, которые равны по катету и острому углу. Из равенства площадей и сторон соответствующих треугольников выводится утверждение задачи.

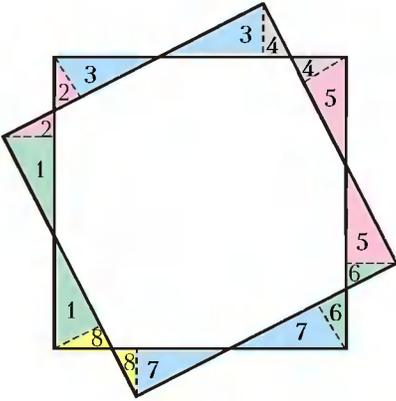


Рис. 2

12. Решим задачу в общем случае – найдем минимально необходимое число разрезов для квадрата размером $n \times n$ клеток. Рассмотрим сначала произвольный клетчатый прямоугольник. Разрезав его по любой линии сетки, мы получим два прямоугольника, у которых длина одной из сторон (той, вдоль которой шел разрез) одинакова. Длины вторых сторон могут и не совпадать.

Но в любом случае получатся два прямоугольника, которые можно сложить так, что один поместится на другом, не выступая за его пределы, и при этом линии сетки совпадут. Поскольку такое наложение разрешено условием, то в дальнейшем вместе с разрезанием большего прямоугольника одновременно будет разрезан и меньший. Поэтому можно после очередного разреза забыть о меньшем из получившихся прямоугольников, ибо, наложив его на больший и в дальнейшем не снимая его, мы одновременно с разрезанием большего прямоугольника на единичные квадратики разрежем на такие же квадратики и меньший. Таким образом, задача свелась к следующей: квадрат размером $n \times n$ разрезаем по линиям сетки и после каждого разреза меньшую из частей отбрасываем (если они одинаковы – то любую). Требуется за наименьшее число разрезов «добраться» до квадрата размером 1×1 .

Расположим исходный квадрат так, чтобы одна из его сторон была горизонтальна, а другая вертикальна, и после очередного разреза и отбрасывания меньшей части большую часть не будем трогать, сохраняя ее ориентацию. Заметим, что при любых разрезаниях вдоль горизонтали меняется лишь высота оставшейся части прямоугольника, а при любых разрезах вдоль вертикали меняется лишь его ширина. Значит, разрезы по вертикали и горизонтали независимы, и их порядок на итоговый размер «остатка» не влияет. Поэтому мы можем сначала произвести все необходимые горизонтальные разрезы, получив из квадрата $n \times n$ горизонтальную полосу размером $1 \times n$, а затем вертикальными разрезами получим из нее квадратик 1×1 .

Выясним, какое потребуется наименьшее количество горизонтальных разрезов. После каждого разреза высота прямоугольника «остатка» уменьшается не более чем вдвое. Поэтому если k – такое натуральное число, что $2^{k-1} < n \leq 2^k$, то наверняка потребуется не менее k разрезов. Покажем, что k разрезов и достаточно. Первым разрезом отрезем прямоугольник высотой 2^{k-1} . Второй получившийся в результате разреза прямоугольник будет иметь высоту $n - 2^{k-1} \leq 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$, т.е. его высота не превышает высоту первого. Значит, отбрасываем второй, так как он – меньший. В дальнейшем все разрезы проводим, деля высоту точно пополам. Тогда после второго разреза высота станет равна 2^{k-2} , после третьего – 2^{k-3} , ..., после k -го – $2^{k-k} = 2^0 = 1$, что и требуется.

Очевидно, столько же потребуется и вертикальных разрезов, а всего, таким образом, нужно сделать $2k$ разрезов. Это и есть ответ для произвольного n .

Так как $2^{10} < 1111 \leq 2^{11}$, то $k = 11$, и для разрезания данного квадрата на единичные квадратики потребуется как минимум $2 \cdot 11 = 22$ разреза.

13. Пусть n – наибольшее число колонок, которые можно установить при заданных условиях. Суммарное количество

улиц, выходящих из перекрестков, на которых установлены колонки, не меньше $4n$. Поскольку среди перекрестков нет соседних, то все эти улицы различные, поэтому $162 \geq 4n$. Отсюда $n \leq 40$.

14. а) Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_k 0 \dots 0}$, где $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n$ – цифры, причем $a_n \neq 0, a_k \neq 0, n \geq k \geq 1$. В частном случае a_k может быть ненулевой цифрой, стоящей в разряде единиц, тогда нули справа в записи числа A отсутствуют. Если взять число $B = 10^m - 1$, где $m \geq n$, то сумма цифр произведения $AB = A \cdot 10^m - A$ равна $9m$. Чтобы убедиться в этом, произведем вычитание в столбик и с учетом поразрядного переноса получим

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_k - 1 + 9 + \dots + 9 - a_n + 9 - a_{n-1} + \dots + 10 - a_k = 9m.$$

б) Сначала построим десять последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 2000, второе – на 2001, ..., десятое – на 2009.

Пусть $A = 2000 \times 2001 \times \dots \times 2009$, тогда требуемым свойством обладают числа $AB + 2000, AB + 2001, \dots, AB + 2009$, где B – некоторый вспомогательный натуральный множитель. Если бы удалось подобрать число B таким образом, чтобы сумма цифр числа AB равнялась 1998, то задача была бы решена. Поскольку $1998 = 9 \cdot 222$, то, по доказанному в п.а), достаточно взять $B = 10^{222} - 1$ (число 222 превышает количество цифр в числе A , поскольку $A < (10000)^{10} = 10^{40}$).

15. Обозначим через x, y числа, задуманные Труляля, а через a, b – числа, задуманные Траляля. Тогда

$$\begin{cases} x + y = ab, \\ a + b = xy. \end{cases}$$

Таким образом, натуральные числа x, y – корни уравнения $z^2 - abz + (a + b) = 0$, дискриминант которого

$D = (ab)^2 - 4(a + b)$ должен быть квадратом целого числа. Без ограничения общности полагаем $b \geq a$.

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $a = 1$, тогда $D = (b - 2)^2 - 8 = t^2$, где t – натуральное (очевидно, $D \neq 0$). Отсюда $(b - 2 - t)(b - 2 + t) = 8$, что возможно в одном из двух случаев:

$$\begin{cases} b - 2 + t = 8, \\ b - 2 - t = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} b - 2 + t = 4, \\ b - 2 - t = 2. \end{cases}$$

Первая из этих систем целых решений не имеет; решение второй системы: $b = 5; t = 1$. Итак, одно из решений задачи:

$a = 1; b = 5$. В этом случае неизвестные x, y составляют множество значений $\{2; 3\}$.

Аналогично, при $a = 2$ получаем $b = 3$ или $b = 2$; этим случаям соответствуют ответы $\{1; 5\}$ и $\{2; 2\}$. Разбор случаев $a = 3, a = 4, a \geq 5$ показывает, что при этих значениях a дискриминант не является квадратом целого числа.

Ответ: Труляля мог задумать либо числа $\{1; 5\}$, либо числа $\{2; 3\}$, либо числа $\{2; 2\}$. Соответственно, Траляля мог задумать либо числа $\{2; 3\}$, либо числа $\{1; 5\}$, либо числа $\{2; 2\}$. Других решений нет.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. При наличии трения часть механической энергии переходит во внутреннюю тепловую энергию тел.
2. Слабо накачанная шин деформируется в большей степени, поэтому ее внутренняя энергия, а значит, и температура, возрастут больше, чем у сильно накачанной шины.
3. На совершение работы против силы сопротивления воздуха и внутренних сил трения во вращающихся частях автомобиля.
4. Частицы покоятся друг относительно друга, т.е. движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями.

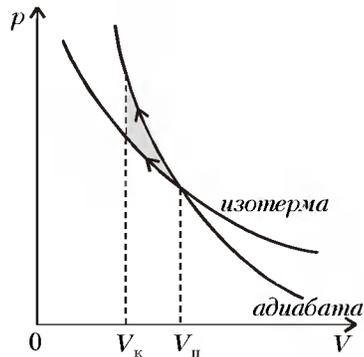


Рис. 3

5. Половина.
6. Работа силы реакции опоры равна нулю в отсутствие трения; в противном случае эта работа отрицательна.
7. Большую часть избыточного тепла мы теряем из-за увеличения притока крови к коже и повышенного потоотделения.
8. Например, при накачивании насосом мяча или велосипедной шины воздух в насосе нагревается

несмотря на то, что через стенки насоса он отдает тепло окружающей среде.

9. В первом случае выделяется больше тепла.
10. При медленном сжатии процесс можно считать изотермическим, при быстром – адиабатным (рис.3). Во втором случае совершаемая над газом работа больше, чем в первом.
11. Холодильник.
12. Выхлопные газы совершают работу за счет убыли их внутренней энергии, а значит, и понижения температуры.
13. Атмосфера Земли.
14. Выгоднее понижать температуру холодильника.
15. Нет, выгоднее использовать холодильник, забирающий тепло от наружного воздуха и выделяющий его в помещение, – так называемый тепловой насос.
16. Силы электрического притяжения пластин в процессе их сближения совершили работу, на величину которой уменьшилась энергия электрического поля, а значит, и выделившееся количество теплоты.
17. В тепло.

Микроопыт

Скрепка заметно нагревается за счет совершенной вами механической работы.

Чему равна сумма углов многоугольника?

2. Постройте для дуг N_i^* , N_{i+1}^* окружности Γ отображения вида (1) со своими (равными по длине) отрезками $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ задания функций $\phi_i(\theta)$.
3. Используйте тот факт, что любой отрезок можно перевести на любой другой отрезок линейным отображением.
4. Можно разбить окружность Γ на дуги γ_i концами единичных векторов, идущих вдоль сторон ломаной P . Построенную по этой ломаной кривую L разобьем на участки, каждый из которых содержит ровно одну дугу $A_i^{(i-1)}A_i^{(i)}$. Затем рассмотрим направления на дугах γ_j , соответствующие направлению обхода кривой L , и подсчитаем сумму Σ .
5. Пусть луч l совпадает с одной из сторон угла Q_i при вершине M_i , составленного продолжением стороны M_{i-1} и стороной M_iM_{i+1} . Если поворот в угле Q_i происходит против (по) часовой стрелки и луч l идет по начальной стороне угла, считая по направлению поворота, то точке M_i надо приписать число +1 (соответственно, 0), а если луч l расположен в концевой стороне угла, – то число 0 (соответственно, -1).
7. Сумма дуг, соответствующих внутренним углам, больше 360° .
8. Отложите диаметр единичной окружности как сторону M_1M_2 и далее для получения остальных вершин откладываете на окружности последовательно дуги величиной $2\pi/n$ с учетом выбранного направления обхода.
9. По данному $k = \text{Ind}_P$, $0 < k < \max \text{Ind}$, выбираем число $m = 2k + 1 < n$, и, построив по правильному m -угольнику замкнутую ломаную L с $\text{Ind}_L = k$, отмечаем на каких-либо ее сторонах произвольные $n - m$ точек как новые вершины. А при $k = 0$ воспользуйтесь рисунком 7 статьи.

Электрические цепи постоянного тока

1. $r = R/2 = 5 \text{ Ом}$.
2. $Q = \frac{CE^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$; $Q_{R_1} = \frac{CE^2}{2} \frac{R_1(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$,
 $Q_{R_2} = \frac{CE^2}{2} \frac{R_2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$, $Q_{R_3} = 0$.
3. $E = 8U_1/5 = 24 \text{ В}$; $U_2 = 8U_1/15 = 8 \text{ В}$.
4. $I_R = \frac{E_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = 1 \text{ А}$, ток течет справа налево.
5. $I = \frac{E(L_1 - L_2)}{2RL_1}$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!
<http://vivovoco.nns.ru>
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,
М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина,
П.И.Чернуцкий

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

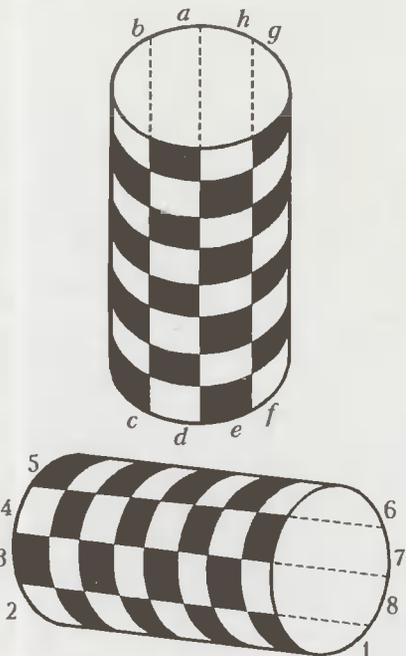
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ №

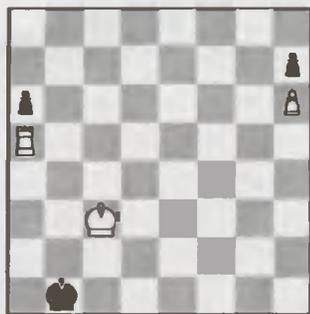
Цилиндрические

шахматы

Среди шахматных игр на необычных досках особой популярностью пользуются цилиндрические шахматы. Из привычной доски можно соорудить две цилиндрические – вертикальную и горизонтальную.



Первая получается при склеивании вертикальных краев обычной доски, а вторая – при склеивании горизонтальных. Интересно, что на цилиндрических досках удастся далеко не все, что возможно на обычной. Например, король и ладья не всегда матуют одинокого короля противника. С другой стороны, здесь открываются совершенно необычные возможности. На следующих диаграммах – сразу по два задания.



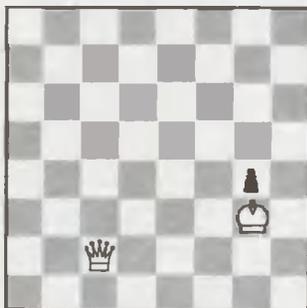
А.Кузнецов, Н.Плаксии, 1969

Мат в 2 хода на обычной доске и вертикальной цилиндрической

На обычной доске все просто – 1. ♖a5 ♗a6 ♘c1 2. ♖a1 ×. Однако на цилиндрической после 1. ♖a5:a6 берется ладья –

1...h7:a6! (вертикали «a» и «h» склеены!). Если же ладья уйдет с a5, то черные продвинут вперед пешку «a», и мата нет.

1. ♖a5-a5!! Именно этот парадоксальный ход решает – ладья совершает «круг почета» и возвращается на исходное место! На вынужденное 1... ♘b1-c1 следует 2. ♖a5-a1 ×.



В.Попов, 1988

Мат в 2 хода на обычной доске и вертикальной цилиндрической

В этой задаче удалось сократить число действующих лиц и придать игре динамичность. На обычной доске – 1. ♘g4! a2 2. ♗c1 ×. На цилиндре взятие на g4 уже не проходит ввиду ответа 1... ♘h1! Решает 1. ♗c2-c2! На сей раз по кругу проходит ферзь: 1... ♘h1 2. ♗b1 × (1...a2 2. ♗c1 ×).

Автор задачи не ограничился этим замыслом, а продолжил поиски. Переставив белого короля и черную пешку, он получил задачу-близнеца (задания на обычной и цилиндрической досках).



Мат в 3 хода

1. ♘g3! Теперь ответ 1...a3 приводит к рассмотренной двухходовке, правда, на цилиндре у черного короля появилось поле h1, но – 1... ♘h1 2. ♗h2 ×.

А вот позиция с тремя заданиями.

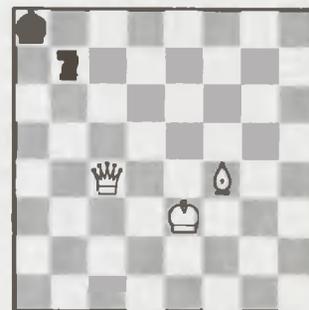
Мат в 1 ход на обычной доске, вертикальной и горизонтальной цилиндрических

На обычной доске следует 1. ♗e2-e8 ×; на вертикальной цилиндрической этот ход не матует из-за ответа 1... ♘a8-h7!, а к цели ведет только 1. ♗e2-g8 ×!



(белый ферзь проходит по маршруту e2-a6-h7-g8); на горизонтальном цилиндре появление ферзя на e8 тоже ничего не дает ввиду 1... ♘a8-a1(b1), а матует 1. ♗e2-a2 ×!

В этой задаче у черного короля нет никакой свободы, и ферзю лишь остается нанести смертельный укол. Поиск более тонкого исходного построения привел к еще одной интересной позиции с теми же заданиями.



Мат в 1 ход на обычной доске, вертикальной и горизонтальной цилиндрических

По сравнению с предыдущей задачей, король черных чувствует себя вольготнее, а пешку b7 заменил более динамичный конь. Тем не менее, на любой доске король мгновенно получает мат. На обычной – 1. ♗a6 ×. Два других маневра ферзем нам уже знакомы: 1. ♗g8 × на вертикальном цилиндре и 1. ♗a2 × – на горизонтальном. Особенность матов состоит в том, что они двойные: ферзь нападает на короля с двух сторон, и перекрытия – в первом случае 1... ♗d8(h8), а во втором 1... ♗a5 (a1) – невозможны.

Задача близнец получается при перестановке белого короля на e4, а ферзя на f1: два финала те же, что и в рассмотренной позиции, а на горизонтальном цилиндре ферзь объявляет мат из центра доски.

1. ♗d3 ×! На короля ферзь нападает по диагонали d3-b1-a8, а поле a7 на сей раз контролирует слон по диагонали f4-c1-b8-a7 (король смещен с e3, чтобы не загромождать дорогу слону).

Е.Гук

53-12

32-14

Физики на монетах мира

Сэр Исаак Ньютон (1642–1727) изображен на английской банкноте достоинством в 1 фунт стерлингов, находившейся в денежном обращении Великобритании в 1977–1997 годах.



TG 2512

6801994517/9



ONE POUND



AT64 122653

В руках великий ученый держит, по-видимому, свой знаменитый труд «Математические начала натуральной философии», а на столике рядом с ним находятся оптическая призма и телескоп. Призма указывает на колоссальный вклад Ньютона в физику оптических явлений, а телескоп отражает его глубокий интерес к астрономии. Размещенная на виньетке схема иллюстрирует один из величайших открытых Ньютоном закон – закон всемирного тяготения. Вероятно, не один месяц просидел сэр Исаак под изображенной на банкноте цветущей яблоней, прежде чем с нее стали отвесно падать спелые плоды, навевая ученому мысли о единстве сил, управляющих движением тел во Вселенной.

Исторически справедлив и сам факт появления Ньютона на английской банкноте – более 20 лет он был смотрителем, а затем и директором Монетного двора в Лондоне.

(Подробнее о жизни и деятельности Исаака Ньютона – внутри журнала.)

